

Competencia espacial en redes

Dolores R. Santos Peñate

Dpto de Métodos Cuantitativos en E. y G.

Universidad de Las Palmas de G.C.

drsantos@dmc.ulpgc.es

Rafael Suárez Vega

Dpto de Métodos Cuantitativos en E. y G.

Universidad de Las Palmas de G.C.

rsuarez@dmc.ulpgc.es

Pablo Dorta González

Dpto de Métodos Cuantitativos en E. y G.

Universidad de Las Palmas de G.C.

pdorta@dmc.ulpgc.es

Resumen

La competencia espacial estudia problemas de localización donde dos o más individuos compiten para captar clientes. En particular, en el modelo líder-seguidor un individuo (el líder) toma decisiones anticipándose a las acciones de un competidor (el seguidor) que responde a la estrategia del primero. Considerando que el mercado está representado por una red, se señalan algunos resultados relativos a este modelo en varios escenarios.

1. Introducción

La competencia espacial o localización competitiva estudia situaciones donde dos o más individuos o firmas compiten para captar clientes, tomando decisiones relativas a la localización en una región con cierta estructura espacial. Existen varios elementos involucrados en un modelo de localización competitiva: el espacio donde se desarrolla el problema, la demanda, los objetivos perseguidos, las características del mercado y las variables de decisión.

El *espacio* es la estructura matemática donde se formula el problema (el plano, una red, un conjunto finito de puntos). El término *demanda* se refiere al tipo de bien que se ofrece, a los criterios que aplica el consumidor para seleccionar un centro de servicio, y a la forma en que se distribuyen los consumidores en el espacio. El *objetivo* natural en un problema de localización competitiva es la maximización del beneficio o de la cuota de mercado. La cuota de mercado captada depende básicamente de tres factores: las características de los consumidores, las propiedades de los centros proveedores y la distancia entre estos centros y los clientes. Las condiciones del *mercado* se refieren al tipo de economía, al número de centros que operan en el mercado y al de aquellos que se instalarán en el futuro.

Como *variables de decisión* pueden intervenir el número y la localización de los centros de servicio, las cantidades servidas por cada centro en los distintos puntos de demanda, los precios fijados en cada centro, las propiedades de las nuevas instalaciones, y el momento de apertura o de cierre de los centros. Entre otros elementos, intervienen además los costes. Éstos pueden ser costes de transporte, costes de producción, costes fijos, costes de instalación u otros.

Los modelos de localización competitiva incluyen implícita o explícitamente una política de precios. Bajo una política de *precios en origen*, la empresa fija un precio único para todos los

consumidores, siendo éstos los que corren con los gastos de transporte. A diferencia del caso anterior, si se fijan precios *en destino*, la firma paga los costes de transporte fijando un precio para cada punto de demanda, lo que constituye una forma de discriminación de precios. En el modelo de Hotelling [7], considerado el inicio de la localización competitiva, se aplica una política de precios en origen. Hotelling presentó un problema de equilibrio que fue revisado posteriormente en [2], otros problemas de equilibrio son analizados en [3, 4, 9, 14].

2. El modelo líder-seguidor en redes

El modelo líder-seguidor [15] plantea un problema de decisión secuencial en un medio competitivo donde un agente, el líder, tiene cierto control sobre las acciones de otro, el seguidor. Una vez que actúa el líder, el problema del seguidor consiste en elegir la mejor opción considerando la posición de su competidor. El problema del líder es determinar su estrategia óptima teniendo en cuenta la respuesta del seguidor, anticipándose así a las acciones de éste.

La formalización de los problemas del líder y del seguidor en redes se atribuye a Hakimi [5, 6]. Combinando dos tipos de demanda (inelástica y elástica) con tres reglas diferentes de elección del consumidor (binaria, parcialmente binaria y proporcional), resultan los seis escenarios estudiados en [6]. La demanda se concentra en los nodos y los centros pueden situarse en cualquier punto de la red.

Sea $N = N(V, E)$ una red conexa donde el conjunto de nodos es $V = \{v_i\}_{i=1}^n$ y el conjunto de aristas es E . Cada nodo $v \in V$ tiene asociado un peso $w(v) \geq 0$ que representa la demanda en v , y cada arista $e = [v_i, v_j] \in E$ tiene longitud $l(e) \geq 0$ que representa el coste unitario de transporte a través de la arista. Para $x, y \in N(V, E)$, la distancia entre x e y , $d(x, y)$, es la longitud del camino más corto que conecta x con y . Para cualquier par de conjuntos finitos $X, Y \subset N(V, E)$, $D(v, X)$ denota la distancia entre el nodo v y el conjunto X , que viene definida por $D(v, X) = \min\{d(v, x) : x \in X\}$, y $V(Y|X)$ denota el conjunto de nodos más próximos a Y que a X , el cual viene dado por $V(Y|X) = \{v \in V : D(v, Y) < D(v, X)\}$.

Sean dos firmas F_X y F_Y con centros en los puntos de X e Y , respectivamente, que compiten para captar clientes. Por $w_X(v)$ denotamos la demanda en el nodo v que es captada por la firma F_X y por $w_Y(v)$ denotamos la demanda en v que es captada por la firma F_Y . La cuota de mercado de F_X es $W(X|Y) = \sum_{v \in V} w_X(v)$. Análogamente, la cuota de mercado para F_Y es $W(Y|X) = \sum_{v \in V} w_Y(v)$.

Los problemas del seguidor y del líder en redes, que Hakimi denominó problema del $(r|X_p)$ -medianoide y problema del $(r|p)$ -centroide, respectivamente, son los siguientes.

- *Problema del $(r|X_p)$ -medianoide (problema del seguidor)*

Existen p centros pertenecientes a la firma F_X ubicados en los puntos del conjunto $X_p = \{x_{r+1}, \dots, x_{r+p}\} \subset N(V, E)$. Una firma competidora F_Y desea instalar r centros en las localizaciones $Y_r = \{x_1, \dots, x_r\} \subset N(V, E)$ que le proporcionen la máxima cuota de mercado. Esto es, se trata de determinar un conjunto $Y_r^* = \{x_1^*, \dots, x_r^*\} \subset N(V, E)$ tal que

$$W(Y_r^*|X_p) = \max_{Y_r \subset N(V, E)} W(Y_r|X_p).$$

A Y_r^* lo llamaremos $(r|X_p)$ -medianoide.

▪ *Problema del $(r|p)$ -centroide (problema del líder)*

No existen firmas operando en el mercado. Una firma F_X desea abrir p centros en las localizaciones $X_p = \{x_{r+1}, \dots, x_{r+p}\} \subset N(V, E)$ que le proporcionen la cuota de mercado máxima, suponiendo que compite con una firma F_Y que instalará centros en el futuro comportándose como una firma seguidora. Es decir, se trata de determinar el conjunto $X_p^* = \{x_{r+1}^*, \dots, x_{r+p}^*\} \subset N(V, E)$ tal que

$$W(X_p^*|Y_r^*(X_p^*)) = \max_{X_p \subset N(V, E)} W(X_p|Y_r^*(X_p))$$

donde $Y_r^*(X_p)$ es un $(r|X_p)$ -medianoide. A X_p^* lo llamaremos $(r|p)$ -centroide.

3. Discretización del problema del $(r|X_p)$ -medianoide

Bajo ciertas condiciones, la *discretización* del problema del seguidor es posible en los seis escenarios considerados por Hakimi [6, 12, 17] (Cuadro 1). Ello garantiza la equivalencia del problema en redes a un problema discreto. Para la regla de elección binaria, utilizando el concepto de *punto isodistante* [11], puede construirse un conjunto finito de puntos que contiene una solución del problema. Para las reglas de decisión parcialmente binaria y proporcional puede encontrarse unas localizaciones óptimas en el conjunto de nodos. Se considera que la demanda en $v \in V$ captada por un centro en x_j es una función decreciente de $f_v(d(v, x_j))$, siendo f_v una función positiva y creciente.

Cuadro 1: Resultados sobre la discretización del problema $(r|X_p)$ -medianoide

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Parcialmente binaria-inelástica con } f_v \text{ cóncavas} \\ \text{Parcialmente binaria-elástica con } f_v \text{ cóncavas} \\ \text{Proporcional-inelástica con } f_v \text{ cóncavas} \\ \text{Proporcional-elástica con } f_v \text{ lineales} \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \exists \text{ un } (r X_p)\text{-medianoide} \\ Y_r^* \subset V \text{ [6]} \end{array}$
<p>Binaria-inelástica $\longrightarrow \exists$ un $(r X_p)$-medianoide $Y_r^* \subset C$, donde C está formado por nodos no isodistantes y localizaciones situadas entre puntos isodistantes [17]</p>
<p>Binaria-elástica con f_v cóncavas $\longrightarrow \exists$ una solución ϵ-óptima, Y_r^*, del problema del $(r X_p)$-medianoide cuyas localizaciones son nodos o están próximas a puntos isodistantes [17]</p>
<p>Proporcional-elástica con f_v cóncavas $\longrightarrow \exists$ un $(r X_p)$-medianoide $Y_r^* \subset V$ [17]</p>

Además, para cada uno de los seis escenarios regla-demanda, la cuota de mercado es creciente respecto de la inclusión de conjuntos y tiene la propiedad submodular [12]. Estas propiedades son útiles en la construcción de algoritmos para resolver los problemas del $(r|X_p)$ -medianoide y el $(r|p)$ -centroide [1, 10].

4. El modelo del $(r|X_p)$ -medianoide incorporando funciones de atracción

El criterio de elección basado únicamente en la distancia es, en la mayor parte de las situaciones, poco realista. El individuo suele considerar también otros aspectos y el comportamiento de los consumidores no es siempre uniforme. Las funciones de atracción se utilizan para definir reglas de elección que no están basadas exclusivamente en la distancia.

En el modelo original de Huff [8] la atracción ejercida por un centro j situado en x_j sobre un cliente en el nodo v_i , que se denota por a_{ij} , es directamente proporcional al tamaño a_j del centro e inversamente proporcional a una potencia de la distancia entre v_i y x_j .

Una regla de elección algo más general resulta de considerar la función de atracción

$$a_{ij} = \frac{a_j}{f_{v_i}(d(v_i, x_j))}$$

donde f_v es positiva, cóncava y creciente para todo $v \in V$, y $I \leq a_j \leq S$ con $0 < I < S$, para todo centro j . El atractivo tiene asociado un coste fijo dado por la función $F(a)$, $I \leq a \leq S$, positiva y creciente.

Suponiendo que la firma F_X tiene p centros ubicados en los puntos $X_p = (x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{r+p}) \in N^p$, con vector de atractivos $A_{X_p} = (a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_{r+p}) \in [I, S]^p$, y que la firma F_Y instala r centros en $Y_r = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in N^r$ con vector de atractivos $A_{Y_r} = (a_1, a_2, \dots, a_r) \in [I, S]^r$, y considerando márgenes de beneficio iguales a la unidad, el problema del $(r|X_p)$ -medianoide consiste en determinar el par $(Y_r^*, A_{Y_r^*})$ en $N^r \times [I, S]^r$ que maximiza el beneficio de la firma F_Y , es decir,

$$W(Y_r^*, A_{Y_r^*}) = \max_{Y \in N^r, A \in [I, S]^r} = \sum_{v \in V} w_Y(v) - \sum_{j=1}^r F(a_j)W(Y, A|X_p, A_{X_p}).$$

Se dice entonces que $(Y_r^*, A_{Y_r^*})$ es un $(r|X_p, A_{X_p})$ -medianoide.

Un resumen de los resultados referentes a estos modelos puede consultarse en [12, 16] donde se define el concepto de punto isoatractivo de forma similar al concepto de punto isodistante. En [16] se resuelve el problema localización-atractivo combinando un algoritmo de ramificación y acotación con procedimientos de búsqueda heurística.

5. Modelos Dinámicos de Localización Competitiva

El modelo líder-seguidor se plantea como un juego secuencial donde el seguidor reacciona ante las acciones del líder. En el problema estático, el líder determina su mejor opción suponiendo que ambas firmas están operando en el mercado, sin considerar el tiempo que podría transcurrir entre la instalación de sus centros y la respuesta de su competidor. Parece más realista plantear el modelo de localización líder-seguidor en un contexto dinámico donde, además de la ubicación de los centros de servicio, se incorpore el instante de apertura de éstos entre las variables de decisión [13].

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la red temática Análisis y Aplicaciones de Decisiones sobre Localización de Servicios y Problemas Relacionados (MTM2004-22566-E).

Referencias

- [1] Benati, S. y Laporte, G. Tabu Search Algorithms for the $(r|X_p)$ -medianoid and $(r|p)$ -centroid Problems. *Location Science*, 2(4):193-204, 1994.
- [2] D'Aspremont, C., Gabszewicz, J.J. y Thisse, J-F. On Hotellings satibility in competition. *Econometrica*, 47(5):1145-1150, 1979.
- [3] Dorta González, P., Santos Peñate, D.R. y Suárez Vega, R. Cournot oligopolistic competition in spatially separated markets: the Stackelberg equilibrium. *The Annals of Regional Science*, 38:1-13, 2004.
- [4] Dorta González, P., Santos Peñate, D.R. y Suárez Vega, R. Spatial competition in networks under delivered pricing. Aceptado en Papers in Regional Science, 2005.
- [5] Hakimi, S.L. On locating new facilities in a competitive environment. *European Journal of Operational Research*, 12: 29-35, 1983.
- [6] Hakimi, S.L. Location with spatial interactions: Competitive locations and games. In Mirchandani P.B. and Francis R.L., editors, *Discrete Location Theory*, pages 439-478. Wiley-Interscience, New York, 1990.
- [7] Hotelling, H. Stability in competition. *Economic Journal*, 39:41-57, 1929.
- [8] Huff, D.L. Defining and estimating a trading area. *Journal of Marketing*, 28:34-38, 1964.
- [9] Lederer, P.J. y Thisse, J-F. Competitive location on networks under delivered pricing. *Operations Research Letters*, 9:147-153, 1990.
- [10] Nemhauser, G.L. y Wolsey, L.A. Best algorithms for approximating the maximum of a submodular set function. *Mathematics of Operations Research*, 3(3):177-188, 1978.
- [11] Peeters, P.H. y Plastria, F. Discretization results for the Huff and Pareto-Huff competitive location models on networks. *Top*, 6(2):247-260, 1998.
- [12] Santos Peñate, D.R. Competencia espacial en redes, en *Avances en localización de servicios y sus aplicaciones*. Universidad de Murcia, Editado por Blas Pelegrín, 2004.
- [13] Santos-Peñate, D.R., Carrizosa, E. y Gordillo J. Competitive location under time-varying demand. EURO XX, Rodas, Grecia, 2004.
- [14] Sarkar, J., Gupta, B. y Pal, D. Location equilibrium for Cournot oligopoly in spatially separated markets. *Journal of Regional Science*, 37(2):195-212, 1997.
- [15] Stackelberg, H. *Markform and Gleichgewicht*. Julius Springer, Vienna, 1934.
- [16] Suárez Vega, R., Santos Peñate, D.R. y Dorta González, P. Discretization and resolution of the $(r|X_p)$ -medianoid problem involving quality criteria. *TOP*, 12(1): 111-133, 2004.
- [17] Suárez Vega, R., Santos Peñate, D.R. y Dorta González, P. Competitive multi-facility location on networks: the $(r|X_p)$ -medianoid problem. *Journal of Regional Science*, 44(3): 569-587, 2004.