Localización competitiva en el plano con decisiones en diseño

José Fernández
Dpto. Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Murcia
josefdez@um.es

Blas Pelegrín
Dpto. Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Murcia
pelegrin@um.es

Bogárka Tóth
Dpto. Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Murcia
boglarka@um.es

Frank Plastria
Dept. Management Informatics
Vrije Universiteit Brussel
Frank.Plastria@vub.ac.be

1. Introducción

Uno de los primeros factores que se debe tener en cuenta a la hora de localizar un nuevo centro de servicio es la existencia o no en la región de otros centros proporcionando el mismo bien o servicio que el nuevo centro va a ofrecer. Si no hay competidores, el nuevo centro tendrá el monopolio del mercado en esa región. Pero si ya existen (o habrá en un futuro) otros centros ofreciendo el mismo servicio, entonces el nuevo centro tendrá que competir con ellos para conseguir parte del mercado. La *Localización Competitiva* estudia precisamente este último tipo de problemas.

Hoy en día se pueden encontrar en la literatura una gran variedad de modelos de localización competitiva (véanse los trabajos (5; 6; 7; 17) y las referencias citadas en ellos). Estos modelos se diferencian unos de otros en los distintos elementos que los componen, entre los que destacamos:

1. *El espacio de localización:* Puede ser el plano, una red, un conjunto discreto, o incluso otros espacios más generales.

2. *El número de centros:* Es importante conocer el número y la ubicación de los centros que cada uno de los competidores tiene en el mercado, así como el número de nuevos centros a localizar.

3. *Las variables de decisión:* Se debe especificar si sólo hay que encontrar las localizaciones óptimas de los nuevos centros, o si además se deben determinar los valores de otras variables, como pueden ser los precios de venta de los productos, cantidades a producir o diseño.

4. *La demanda:* Lo habitual es suponer que se encuentra acumulada en un conjunto finito de puntos, denominados *puntos de demanda*, aunque también hay modelos en los que se considera que está distribuida de forma continua por toda la región. La demanda de *bienes esenciales* se considera que es *inelástica*, esto es, los consumidores satisfacen su demanda independientemente de cuál sea su precio o de la forma de conseguirla. En cambio, cuando los bienes no son esenciales, resulta más apropiado considerar una demanda de tipo *elástica*, esto es, dependiendo del coste final (suma de precio y coste de transporte y otros factores)

del producto o servicio, los consumidores demandan una cantidad diferente. Por otro lado, el nivel de demanda puede ser conocido de forma *determinística*, o bien estar regido por alguna regla *estocástica*.

5. *Las reglas de la competencia:* Hay que especificar si la forma de competir es *estática*, lo que significa que los competidores toman sus decisiones simultáneamente en un momento dado, o bien que sólo hay un competidor que toma decisiones (el propietario de los nuevos centros) sin tener en cuenta las posibles reacciones de los demás, o *secuencial*, si los competidores toman sucesivamente sus decisiones en un cierto orden. En particular, si hay dos competidores, uno de ellos (el líder) debe tomar las decisiones anticipándose a las posibles decisiones del otro (el seguidor), dando lugar a lo que se conoce como modelos de tipo *Stackelberg*. Además, si cada uno de ellos puede cambiar sucesivamente sus decisiones nos encontramos con modelos *dinámicos*, en los que encontrar situaciones de *equilibrio* suele ser de gran interés.

6. *La atracción de los clientes a los centros:* Puede ser *uniforme*, si sólo depende de la distancia (cosa que pude suceder cuando todos los centros, existentes y nuevos, son similares), o *multiforme*, si además de la distancia influyen otros factores (como puede ser el precio, tamaño del centro, calidad, servicios complementarios, etc.)

7. *El patrón de elección:* Puede ser *determinístico (o binario)*, si los clientes satisfacen toda su demanda en el centro hacia el que sienten una mayor atracción; *proporcional*, si reparten su demanda entre todos los centros de forma proporcional al nivel de atracción que experimentan hacia ellos; o incluso *parcialmente binario*, si los centros pertenecen a distintas cadenas y la demanda se reparte entre las cadenas de forma proporcional, pero la parte de la demanda asignada a una cadena se obtiene del centro de dicha cadena hacia el que se siente una mayor atracción.

8. *El criterio de decisión:* Suele ser *maximizar el beneficio* obtenido por la empresa propietaria de los nuevos centros a localizar. No obstante, cuando en el modelo no se incluyen costes, el objetivo es equivalente a *maximizar la cuota de mercado* captada por la empresa.

Si además de las localizaciones de los nuevos centros se consideran otras variables de decisión, o bien se analizan situaciones de equilibrio entre varios competidores, los modelos que se obtienen son muy complejos de analizar en espacios no lineales, resultando muy difícil la determinación de soluciones óptimas. Por ello, la mayoría de los modelos de localización competitiva estudiados, cuando el espacio es una red o el plano, sólo contemplan *decisiones en localización* y son de *tipo estático*. En una gran parte de estos modelos, se parte de que ya existen varios centros establecidos y se pretende determinar la localización de nuevos centros con el objetivo de conseguir la mayor *cuota de mercado* posible. Podemos distinguir dos grandes grupos, según que la atracción de los clientes sea uniforme o multiforme. Los modelos en los que la atracción es *multiforme* tienen su origen en los trabajos de Huff (11; 12), quien supuso que el número de usuarios que eligen un determinado centro es directamente proporcional a su extensión comercial e inversamente proporcional a la distancia al mismo. Nakanishi y Cooper (15) reemplazaron la extensión comercial como factor de atracción al centro por una serie de atributos, creando un modelo más realista que fue aplicado por Jain y Mahajan (13) para el estudio de puntos de venta de alimentación.

En general, la atracción de cada punto de demanda por un centro (*función de atracción*) es medida por un cociente, donde el numerador toma un valor representado por un parámetro, que denominaremos *calidad*, que representa la valoración de las características del centro, y el denominador es una función no decreciente de la distancia entre el punto de demanda y el correspondiente centro. Cuando se usa un patrón de elección proporcional, los modelos anteriores son conocidos con el nombre de *modelos gravitacionales* y han sido utilizados en numerosas aplicaciones, principalmente por geógrafos y economistas (8). Cuando el espacio es continuo, la determinación de localizaciones óptimas es complicada, ya que la función objetivo no es cóncava (ni cónvexa). En (1; 4) se aplicaron métodos de búsqueda local , pero no se dispone de métodos que garanticen la optimalidad de las soluciones encontradas.

Considerar decisiones en *localización y calidad* en estos modelos, supone aumentar notablemente su dificultad de resolución. Para un patrón de elección proporcional, esto ya fue tenido en cuenta por T. Drezner en (1), donde se obtenían óptimos locales en localización para diferentes niveles de calidad, lo que sólo supone una aproximación de la solución óptima del modelo. Posteriormente, esta autora también ha estudiado un modelo con decisiones en calidad para todos los centros de una cadena, limitada a un presupuesto dado, en el que sólo se obtiene óptimos locales para las localizaciones (2).

Por otro lado, cuando el patrón de elección es determinístico, el problema ha sido resuelto en el plano con éxito por Plastria y Carrizosa, quienes lo reducen a un problema bicriterio de máximo cubrimiento/mínimo cuantil para el cual existen algoritmos finitos de resolución (16; 18).

En el grupo de 'Investigación Operativa' de Murcia estudiamos el problema de localizar un nuevo centro en el plano, en situación de competencia estática, demanda inelástica concentrada en un conjunto finito de puntos, patrón de elección proporcional, y en el que la función de atracción depende tanto de la localización como de la calidad del centro. Estos dos elementos son las variables de decisión del problema, y deberán ser determinados con el fin de maximizar el beneficio obtenido por la cadena que desea ubicar el nuevo centro, entendido éste como la diferencia entre los beneficios brutos debidos a la cuota de mercado captada menos los costes de implantación asociados a la ubicación y dotación al servicio de características para ofrecer un determinado nivel de *calidad*.

2. El modelo

Consideremos una cadena que desea abrir un nuevo centro en una determinada región del plano. Suponemos que ya existen varios centros ofreciendo el mismo bien o servicio a un conjunto de consumidores o usuarios. Parte de los centros pertenecen a la cadena. La demanda es inelástica, y se encuentra concentrada en diferentes puntos de la región, cuyas coordenadas y niveles de demanda son conocidos. Las coordenadas de los centros ya establecidos también se conocen, así como las diferentes valoraciones de calidad en los puntos de demanda para cada uno de los centros. La atracción en un punto de demanda por un centro es medida por el cociente entre la calidad y una función de su distancia al centro, generalizando así otras medidas, como las utilizadas en (3; 10; 11; 15).

Utilizaremos la siguiente notación:

x	localización del nuevo centro, $x = (x_1, x_2)$.
α	calidad del nuevo centro ($\alpha > 0$).
n	número de puntos de demanda.
p_i	localizaciones de los puntos de demanda, $p_i = (p_{i1}, p_{i2})$, $i = 1, \ldots, n$.
w_i	demanda (o poder de compra) en p_i.
w	demanda total (o poder de compra) en la región, $w = \sum_{i=1}^n w_i$.
m	número de centros existentes.
f_j	localizaciones de los centros existentes, $j = 1, \ldots, m$.
k	número de centros existentes propiedad de la cadena (supondremos que son los primeros k de los m centros, $0 \leq k < m$).
d_{ij}	distancia entre el punto de demanda p_i y el centro f_j.
d_{ix}	distancia entre el punto de demanda p_i y el nuevo centro x.
α_{ij}	calidad del centro f_j según es percibida por el punto de demanda p_i.
$g_i(\cdot)$	una función no negativa y no decreciente.
$\dfrac{\alpha_{ij}}{g_i(d_{ij})}$	atracción que el punto de demanda p_i siente hacia el centro f_j.
γ_i	ponderación para la calidad de x según es percibida por el punto de demanda p_i.
$\dfrac{\gamma_i \alpha}{g_i(d_{ix})}$	atracción que el punto de demanda p_i siente hacia el nuevo centro x.

El patrón de elección de los consumidores es proporcional, esto es, los puntos de demanda reparten su demanda entre todos los centros de forma proporcional al nivel de atracción que sienten hacia ellos. Por consiguiente, la cuota de mercado captada por la cadena en su conjunto es

$$M(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\dfrac{\gamma_i \alpha}{g_i(d_{ix})} + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_{ij}}{g_i(d_{ij})}}{\dfrac{\gamma_i \alpha}{g_i(d_{ix})} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_{ij}}{g_i(d_{ij})}}.$$

El problema a resolver es

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{máx} & \Pi(x, \alpha) = F(M(x, \alpha)) - G(x, \alpha) \\ \text{s.a.} & d_{ix} \geq d_{\text{mín}} \ \forall i \\ & \alpha \in [\alpha_{\text{mín}}, \alpha_{\text{máx}}] \\ & x \in S \subset \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $F(\cdot)$ es una función diferenciable estrictamente creciente que transforma la cuota de mercado captada en beneficios brutos (ingresos menos costes variables (coste del producto para la empresa)), $G(x, \alpha)$ es una función diferenciable que da los costes de implantación de un centro ubicado en x con calidad α, y $\Pi(x, \alpha)$ es el beneficio obtenido por la cadena. Los parámetros $d_{\text{mín}} > 0$ y $\alpha_{\text{mín}} > 0$ aseguran que el nuevo centro no se ubica sobre uno de los puntos de demanda y que tiene un mínimo nivel de calidad, respectivamente. El parámetro $\alpha_{\text{máx}}$ es el valor máximo que la calidad de un centro puedo tomar en la práctica. Por S denotamos a la región del plano donde se puede ubicar el nuevo centro.

La función F será en determinados casos lineal, $F(M(x, \alpha)) = c \cdot M(x, \alpha)$, siendo c el ingreso que se obtiene por unidad de producto vendida (el beneficio marginal en problemas sin economías de escala), aunque, por supuesto, para problemas con economías de escala otro tipo de funciones pueden ser más apropiadas.

La función $G(x, \alpha)$ debería crecer conforme x se aproxima a uno de los puntos de demanda, ya que en torno a dichos puntos los costes de implantación de los centros suelen ser más grandes (debido al precio del suelo y de los locales). Por otro lado, G debería ser una función no decreciente y convexa en la variable α, ya que cuanta más calidad se quiera, más costoso será conseguirla, y además en una proporción creciente. En este trabajo consideraremos que la función G es separable, de la forma $G(x, \alpha) = G_1(x) + G_2(\alpha)$. Algunas posibles formas para G_1 pueden ser $G_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(d_{ix})$, con $\Phi_i(d_{ix}) = w_i/((d_{ix})^{\phi_{i0}} + \phi_{i1})$, $\phi_{i0}, \phi_{i1} > 0$, o $\Phi_i(d_{ix}) = w_i/(e^{\frac{d_{ix}}{\phi_{i0}}} - 1 + \phi_{i1})$, con $\phi_{i0}, \phi_{i1} > 0$ parámetros fijos. Por lo que se refiere a G_2, podría ser de la forma $G_2(\alpha) = (\alpha/\alpha_0)^{\alpha_1}$, $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 1$, o $G_2(\alpha) = e^{\frac{\alpha}{\alpha_0}+\alpha_1} - e^{\alpha_1}$, con $\alpha_0 > 0$ y α_1 valores dados.

En cuanto a las funciones g_i, los ejemplos más usuales propuestos en la literatura son $g_i(d_{ix}) = e^{\lambda_i d_{ix}}$ (10) y $g_i(d_{ix}) = (d_{ix})^{\lambda_i}$ (1), con $\lambda_i > 0$ un parámetro dado, si bien también son posibles otros tipos de funciones.

La función objetivo Π no es ni cóncava ni convexa, y puede tener varios óptimos locales.

Para resolver el problema hemos propuesto dos procedimientos de resolución. El primero, un método de búsqueda local (no garantiza encontrar el óptimo global), es una modificación del procedimiento tipo Weiszfeld propuesto en (1), con objeto de incluir la calidad α como variable adicional, y para tener en cuenta la presencia de restricciones. El segundo, un algoritmo de ramificación y acotación intervalar, siempre da como solución una región que contiene a todos los óptimos globales del problema, con la precision prefijada de antemano que se quiera. A los lectores interesados que deseen más detalles sobre el Análisis de Intervalos aconsejamos la lectura de (9; 14; 19).

La solución proporcionada por el algoritmo tipo Weiszfeld no difiere mucho del óptimo global en términos de valor objetivo. Además, dicho método es más rápido que el intervalar. No obstante, las respectivas localizaciones no están tan cercanas a la región de casi optimalidad ofrecida por el algoritmo intervalar. Téngase en cuenta que los costes de implantación para la empresa son costes *hundidos*, no recuperables en su mayoría en procesos de deslocalización (cambio de ubicación), y la decisión de la localización repercutirá durante un largo período de tiempo (el nivel de atracción es menos costoso de modificar). Resulta por ello apropiado disponer de la ubicación óptima, y la utilización de algoritmos que no sean capaces de proporcionarla con garantía (aunque sean computacionalmente más rápidos) debe ser tomada con cautela.

3. Extensiones

Entre las posibles extensiones de este trabajo mencionamos las siguientes:

- Considerar la localización de varios centros por parte de la cadena.
- Considerar un modelo bicriterio, en el que uno de los objetivos sea maximizar los beneficios obtenidos por la cadena y el otro maximizar los beneficios obtenidos por el nuevo centro que se va a abrir. Este modelo es de especial interés cuando la cadena es una franquicia, ya que entonces los intereses del franquiciador y del franquiciado entran en conflicto.
- Asimismo, la consideración simultánea de la maximización de beneficios de la cadena y la minimización del canibalismo entre los centros de la cadena (entendiendo por canibalismo la pérdida de beneficio que experimentan los centros existentes pertenecientes a la cadena

debido a la apertura del nuevo centro de la cadena) da lugar a otro modelo bicriterio de gran interés.

- Otras extensiones conllevan la consideración de otros patrones de elección. En particular, el patrón *parcialmente binario* origina un problema difícil e inexplorado. Por lo que se refiere al patrón binario, sólo ha sido estudiado para el caso particular en que $G(x, \alpha) = G(\alpha)$ en (18); el caso general está abierto a futuras investigaciones.
- Finalmente, también queda como línea abierta el estudio de un modelo tipo Stackelberg, en el que tanto el líder como el seguidor desean localizar un único centro.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la red temática Análisis y Aplicaciones de Decisiones sobre Localización de Servicios y Problemas Relacionados (MTM2004-22566-E).

Referencias

[1] Drezner T. Optimal continuous location of a retail facility, facility attractiveness, and market share: an interactive model, *Journal of Retailing* 70:49–64, 1994.

[2] Drezner T. Location of multiple retail facilities with limited budget constraints – in continuous space, *Journal of Retailing and Consumer Services* 5:173–184, 1998.

[3] Drezner T. y Drezner Z. Validating the gravity-based competitive location model using inferred attractiveness, *Annals of Operations Research* 111:227–237, 2002.

[4] Drezner T., Drezner Z. y Salhi S. Solving the multiple competitive facilities location problem, *European Journal of Operational Research* 142:138–151, 2002.

[5] Eiselt H.A. y Laporte G. Sequential location problems, *European Journal of Operational Research* 96:217–231, 1996.

[6] Eiselt H.A., Laporte G. y Thisse J.-F. Competitive location models: a framework and bibliography, *Transportation Science* 27:44–54, 1993.

[7] Friesz T., Miller T. y Tobin R. Competitive Network Facility Location Models: a Survey, *Papers of the Regional Science Association* 65:47–57, 1988.

[8] Ghosh A. y Rushton G. *Spatial analysis and location-allocation models*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1987.

[9] Hansen E. *Global Optimization Using Interval Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[10] Hodgson M.J. A location-allocation model maximizing consumers' welfare, *Regional Studies* 15:493–506, 1981.

[11] Huff D.L. Defining and estimating a trading area, *Journal of Marketing* 28:34–38, 1964.

[12] Huff D.L. A programmed solution for approximating an optimal retail location, *Land Economics* 42:293–303, 1966.

[13] Jain A.K. y Mahajan V. Evaluating the competitive environment in retailing using multiplicative competitive interactive models, in: Sheth J. (Ed.), *Research in Marketing*, JAI Press, pp. 217–235, 1979.

[14] Kearfott R.B. *Rigorous Global Search: Continuous Problems*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[15] Nakanishi M. y Cooper L.G. Parameter estimate for multiplicative interactive choice model: least square approach, *Journal of Marketing Research* 11:303–311, 1974.

[16] Plastria F. Profit maximising single competitive facility location in the plane, *Studies in Locational Analysis* 11:115–126, 1997.

[17] Plastria F. Static competitive facility location: an overview of optimisation approaches, *European Journal of Operational Research* 129:461–470, 2001.

[18] Plastria F. y Carrizosa E. Optimal location and design of a competitive facility, *Mathematical Programming*, DOI 10.1007/s10107-003-0468-5, 20p, 100:247–265, 2004.

[19] Ratschek H. y Rokne J. *New Computer Methods for Global Optimization*, Ellis Horwood, Chichester, 1988.