Modelos de localizacin competitiva con precios de entrega

Blas Pelegrn Pelegrn
Dpto. Estadstica e Investigacin Operativa
Universidad de Murcia
pelegrin@um.es

Pascual Fernndez Hernndez
Dpto. Estadstica e Investigacin Operativa
Universidad de Murcia
pfdez@um.es

Mara Dolores Garca Prez
Dpto. Ciencias Sociales, Jurdicas y de la Empresa
Universidad Catlica San Antonio de Murcia
mdolores@pdi.ucam.edu

1. Introduccin

Cuando se estudia una actividad econmica, la distancia entre los puntos de servicio y los de demanda tiene una gran importancia, de ah que una localizacin adecuada de los centros que desarrollan dicha actividad sea primordial para su buen funcionamiento. Cuando varias empresas compiten por la demanda de un producto, cada consumidor elegir alguno de los centros para ser servido, siendo el centro ms cercano el que usualmente es seleccionado, lo cual puede ser vlido cuando las diferencias entre los centros son despreciables, o bien en regiones donde las posibilidades de compra son pocas y el desplazamiento es complicado. Sin embargo, la eleccin depende tambin de otras caractersticas, tales como el precio, el equipamiento, las instalaciones, la calidad, etc.

Para maximizar su beneficio, cada competidor tiene que tomar decisiones estratgicas que influyen en el patrn de eleccin, y por tanto en la cuota de mercado que puede conseguir. Entre tales decisiones figura su localizacin, lo que ha motivado el desarrollo de una amplia variedad de modelos, mucho ms complejos de analizar que en situacin monopolstica, y que se denominan *Modelos de Localizacin Competitiva*. En ellos se consideran aspectos muy variados, como el nmero de centros a localizar, caractersticas del espacio de localizacin, conjunto de localizaciones posibles, medida para la estimacin de distancias, reglas de asignacin de la demanda, criterios de eficacia, etc., dependiendo del tipo de problema que se considere. Entre otros, pueden consultarse los trabajos de recopilacin (4; 7; 12), y los libros (2; 3; 10).

En la mayora de estos modelos slo se consideran decisiones sobre *localizacin*, lo que permite estudiar los problemas planteados en espacios que representan un gran nmero de situaciones reales, como son el plano o una red. Sin embargo, cuando se consideran otras decisiones, estos modelos se vuelven muy complejos y difciles de resolver. En particular esto sucede cuando se consideran decisiones sobre *precios*, como ocurre en el modelo propuesto por Hotelling (8), donde se plantean decisiones sobre localizacin y precio para dos competidores en un mercado lineal con usuarios uniformemente distribuidos. La principal caracterstica de este tipo de modelos es la falta de equilibrios cuando los competidores deciden sobre localizacin y precio simultneamente. Ello ha sido subsanado en algunas ocasiones considerando el problema como un juego de dos etapas, primero se toman decisiones sobre localizacin y despus sobre precio. Esto est respaldado por el hecho de que las decisiones sobre localizacin son relativamente permanentes, mientras que las decisiones sobre precio pueden ser cambiadas con frecuencia. Cuando se consideran precios *a la puerta de la firma* con los gastos de transporte a cargo de los consumidores, slo se han encontrado equilibrios en precios para localizaciones y costes de transporte en algunos casos particulares (5). Sin embargo, la existencia de precios en equilibrio es posible bajo una poltica de precios *a la puerta del consumidor*, donde las firmas pagan los costes de transporte, lo cual es una forma de discriminacin de precios (9).

En este caso se estudia un problema de competencia con decisiones sobre *localizacin y precio* en un espacio de localizacin general, donde la demanda se distribuye por zonas y los precios son discriminatorios. Una vez establecidas la notacin y las hiptesis bsicas, se estudia el problema de competencia en precios para mercados espacialmente separados y cualquier nmero de competidores, en contraposicin al caso tradicional de un mercado lineal con demanda distribuida continuamente. Se han obtenido condiciones necesarias y suficientes para la existencia de precios en equilibrio que se corresponden a los casos de precios mnimos de venta en origen iguales. Como consecuencia de la existencia de equilibrios, surgen nuevos modelos con decisiones sobre localizacin, cuya resolucin depende fuertemente del espacio de localizacin que se considere en cada caso. Cuando es discreto, se presentan formulaciones del problema como un modelo de *Programacin Lineal Entera Mixta* para diferentes patrones de eleccin de los consumidores.

2. El problema de localizacin con precios discriminatorios

Sea E un espacio de localizacin en el que hay un conjunto de zonas de consumo, que denotaremos por $C = \{1, 2, ..., n\}$. Suponemos que la demanda de cada zona se concentra en un punto del espacio. Denotamos por c_i al punto de E en el que se concentra la demanda de la zona i. Sea $F = \{1, 2, ..., m\}$ el conjunto de centros de servicio que van a servir la demanda en las zonas. Denotemos por f_j al punto de E donde est localizado el centro j. Sea d_{ij} la distancia entre los puntos c_i y f_j, que mediremos por el camino ms corto cuando E sea una red de transporte (8; 11), o por una funcin norma cuando E sea el plano (6; 1). El cardinal de un conjunto A lo denotaremos por $|A|$. Consideramos que la demanda es inelstica y que el producto a consumir es homogneo. Sea w_i el nmero de consumidores en el rea i y W el nmero total de consumidores en el mercado. El producto es enviado a los consumidores desde los centros y estos asumen los costes de transporte. Sea t el coste de transporte por unidad de producto y unidad de distancia. Para cada centro j, el coste unitario de produccin es b_j y el precio mnimo de venta en origen sin incurrir en prdidas es p_{0j}. Cada centro j puede ofrecer el producto a los consumidores en la zona i a un precio p_{ij}, de manera que $p_{ij} \geq p_{0j} + td_{ij}$, $i = 1, ..., n$.

El patrn de eleccin de los consumidores es el siguiente:

i) Los consumidores en cada zona compran en el centro que les ofrece el menor precio.

ii) Si varios centros ofertan el mismo precio mnimo en una zona, los consumidores compran en el centro ms cercano.

Si ocurre que varios centros ofertan el mismo precio y estn a igual distancia de una zona i, entonces hay que precisar en qu forma se reparte la demanda de esa zona entre ellos. En principio cualquier distribucin es posible, pero lo ms normal es un reparto uniforme. En general usaremos las dos reglas siguientes para resolver los empates de varios centros en precio y distancia mnimos:

Regla equitativa: Repartir por igual la demanda entre todos los centros empatados.

Regla conservadora: Repartir la demanda solamente entre los centros existentes empatados.

Utilizando el patrn de eleccin mencionado, para cada zona i es fcil obtener el conjunto MP_i de centros en los cuales los consumidores en i compran al precio ms bajo, y el conjunto MPD_i de estos centros que estn ms cerca al punto c_i. Ambos conjuntos quedan definidos por los siguientes conjuntos de ndices, respectivamente:

$$\begin{aligned} MP_i &= \{k \in F : p_{ik} \leq p_{ij}, \forall j = 1, \ldots, m\} \\ MPD_i &= \{h \in MP_i : d_{ih} \leq d_{ik}, \forall k \in MP_i\} \end{aligned}$$

El mercado que cada centro j consigue est definido por el conjunto de ndices $M_j = \{i \in C : j \in MPD_i\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Este conjunto puede ser dividido en dos subconjuntos $M_j^1 = \{i \in M_j : MPD_i = \{j\}\}$ y $M_j^2 = \{i \in M_j : |MPD_i| \geq 2\}$. Si $i \in M_j^1$, el centro j captura toda la demanda en i. Para $i \in M_j^2$, el centro j conseguir una fraccin de la demanda en i entre 0 y 1, dependiendo de la regla de reparto elegida. Una vez determinada la cuota de mercado de cada uno de los centros, se pueden obtener los correspondientes beneficios, que dependern de las localizaciones, de los precios que ofrecen en las zonas, y de la regla de reparto que se utilice. En esta situacin, se plantea el problema de determinar la mejor estrategia en localizacin y la mejor eleccin de los precios con objeto de que una empresa que va a competir por ese mercado maximice el beneficio. En primer lugar analizaremos la competencia en precios y despus estudiaremos el problema de localizacin.

3. Competencia en precios

Una vez localizados los centros, como los precios se pueden cambiar fcilmente, es posible reaccionar ante cualquier variacin de precios de un competidor. De esta manera, habr un proceso dinmico durante el cual cada centro ir cambiando sucesivamente sus precios con objeto de aumentar su beneficio. Pretendemos saber si los precios se estabilizarn, es decir si existir algn tipo de equilibrio. En esta seccin, analizaremos la existencia de equilibrios suponiendo que *todos los centros compiten entre s y se usa la regla equitativa.*

Sean $p_{\cdot j} = (p_{1j}, \ldots, p_{nj})$ el vector cuyas componentes son los precios de venta del centro j en las diferentes zonas y $\alpha_{\cdot j} = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})$ el vector correspondiente a los precios ms bajos que dicho centro puede ofertar, entonces se cumple que $p_{ij} \geq \alpha_{ij} = p_{0j} + td_{ij}$. El beneficio de un centro depender de sus precios y de los precios de los otros centros. De manera que, usando la regla equitativa de reparto para un conjunto fijado de localizaciones, la funcin beneficio de cada centro j puede expresarse como:

$$\Pi_j(p_{\cdot 1}, \ldots, p_{\cdot j}, \ldots, p_{\cdot m}) = \sum_{i \in M_j} (p_{ij} - b_j - td_{ij}) w_i / |MPD_i| \qquad (1)$$

Una matriz de vectores de precio $\overline{P} = (\overline{p}_{\cdot 1}, \ldots, \overline{p}_{\cdot j}, \ldots, \overline{p}_{\cdot m})$ es un equilibrio de Nash si ningn centro j incrementa su beneficio variando unilateralmente su precio $\forall p_{\cdot j} \geq \alpha_{\cdot j}$.

Para que una matriz de precios sea un equilibrio debe verificarse lo siguiente:

Sea $\overline{P} = (\overline{p}_{\cdot 1}, \ldots, \overline{p}_{\cdot j}, \ldots, \overline{p}_{\cdot m})$ *una matriz de precios de equilibrio, entonces para i=1, 2,..., n se verifica:*

a) $|MP_i| \geq 2$

b) Si $MPD_i = \{h\}$ entonces:
$\overline{p}_{ik} = \alpha_{ik}, \forall k \in MP_i, k \neq h$
$$\overline{p}_{ij} \geq \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ij} \geq \alpha_{ik} \;\; si \;\; d_{ij} > d_{ih} \\ \alpha_{ij} > \alpha_{ik} \;\; si \;\; d_{ij} \leq d_{ih} \end{array} \right\} \forall j \notin MP_i, k \in MP_i, k \neq h$$

c) Si $|MPD_i| \geq 2$ entonces:
$\overline{p}_{ik} = \alpha_{ik}, \forall k \in MP_i$
$$\overline{p}_{ij} \geq \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ij} \geq \alpha_{ik} \;\; si \;\; d_{ij} > d_{ik} \\ \alpha_{ij} > \alpha_{ik} \;\; si \;\; d_{ij} \leq d_{ik} \end{array} \right\} \forall j \notin MP_i, k \in MPD_i.$$

As pues, en situacin de equilibrio, al menos dos centros deben haber ofertado el precio ms bajo en cada zona. Si slo uno est a mnima distancia, los otros con el precio ms bajo deben haber ofertado su precio mnimo. Si hay ms de uno a mnima distancia, todos los centros con el precio ms bajo deben haber ofertado su precio mnimo.

3.1. Existencia y caracterizacin de equilibrios

Supongamos que el precio mnimo de venta en origen es igual para todos los competidores, es decir, $p_{0j} = p_0, \forall j \in F$. A igualdad de precios en origen, slo los centros ms cercanos a cada una de las zonas podrn reaccionar ofreciendo el menor precio, de esta forma capturan el mercado de la zona cualquiera que sea la oferta de sus competidores.

Para cada zona i definimos los siguientes conjuntos:

$$F_i^1 = \{h \in F : d_{ih} \leq d_{ij}, \forall j \in F\}$$
$$F_i^2 = \{k \in F \setminus F_i^1 : d_{ik} \leq d_{ij}, \forall j \in F \setminus F_i^1\}$$

que contienen, respectivamente, a los centros ms cercanos y a los segundos centros ms cercanos al punto c_i. De esta forma, los precios en equilibrio quedaran caracterizados como sigue:

Si slo hay un centro ms cercano a una zona, su precio y el de un segundo centro ms cercano deben ser iguales al precio mnimo que puede ofertar este ltimo. Si hubiese ms de un centro a mnima distancia, todos ellos deben ofertar su precio ms bajo.

4. Nuevos modelos de localizacin

En la seccin anterior hemos demostrado que, una vez localizados los centros, el proceso de competencia en los precios conduce a una estabilizacin de los mismos en sus valores de equilibrio. Vamos a ver que para todos los equilibrios el beneficio en cada uno de los centros es el mismo. Como consecuencia, se obtienen los nuevos modelos de localizacin.

4.1. Funciones beneficio para precios en equilibrio

Si los precios mnimos en origen son iguales en todos los centros, para cualquier matriz de precios en equilibrio se obtiene que $MPD_i = F_i^1$ para cada zona i, donde F_i^1 est definido aqu por los centros a mnima distancia de c_i. Entonces la cuota de mercado que captura un centro j viene dada por $M_j = M_j^1 \bigcup M_j^2$, donde $M_j^1 = \{i : F_i^1 = \{j\}\}$ y $M_j^2 = \{i : |F_i^1| \geq 2, j \in F_i^1\}$. Usando resultados anteriores podemos sustituir los correspondientes precios en la expresin de la funcin beneficio quedando sta de la siguiente forma:

$$\Pi_j(\overline{p}_{\cdot 1}, \ldots, \overline{p}_{\cdot j}, \ldots, \overline{p}_{\cdot m}) = \sum_{i \in M_j^1} [p_0 + td_{ik} - b_j - td_{ij}]w_i + (p_0 - b_j) \sum_{i \in M_j^2} w_i / |F_i^1| \qquad (2)$$

donde $k \in F_i^2$.

Como vemos, el beneficio no depende de la matriz de precios en equilibrio, sino de dnde estn localizados los centros. En consecuencia, haciendo operaciones en (2), se obtiene que el beneficio obtenido por un centro j es el producto del beneficio unitario en origen por la cuota de mercado del centro j, ms el ahorro en el coste de transporte como consecuencia de la mayor proximidad del centro j a las zonas en M_j^1.

5. Formulaciones en el caso discreto

Supongamos que E es un espacio de localizacin discreto, en el que los consumidores y los centros estn ubicados en los nodos de una red de transporte. Sea $C = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de nodos. Una nueva empresa que quiere entrar en el mercado, desea conocer las localizaciones de sus centros y los precios que debe ofertar en cada centro, con objeto de maximizar su beneficio. Denotemos por $F^e = \{1, \ldots, q\}$ al conjunto de centros ya establecidos, con los cuales la nueva empresa tiene que competir. Sea s el nmero de nuevos centros a localizar y L el conjunto de nodos de la red candidatos a localizacin. Por d_{ij} denotamos la distancia entre los nodos i y j, y por D_i a la distancia de i al centro existente ms cercano. Para simplificar consideraremos que el precio en origen y el coste de produccin son iguales para todos los centros, a los cuales denotaremos por p_0 y b respectivamente. En este escenario, vamos a formular los nuevos modelos para cada una de las reglas de reparto vistas en la seccin 2. Previo a su formulacin, estableceremos los precios en equilibrio para las posibles localizaciones.

5.1. Formulacin para la regla conservadora

Competencia en precio

Una vez localizados los nuevos centros, el conjunto F de los m centros que atendern la demanda quedar determinado, q de los cuales son los de F^e y $m - q$ son los nuevos. Para cualquier nodo i definimos los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
F_i &= \{h \in F : d_{ih} \leq d_{ij}, \forall j \in F\} \\
F_i^e &= \{k \in F^e : d_{ik} \leq d_{ij}, \forall j \in F^e\}
\end{aligned}
$$

Si $F_i \cap F_i^e = \emptyset$, la estrategia ptima de la nueva firma es ofertar a los consumidores en i el precio $p_{ih} = p_0 + tD_i$, donde $D_i = min\{d_{ik} : k \in F^e\}$, para al menos un h en F_i. Los precios p_{ij} en el resto de centros pueden ser arbitrarios por lo que podemos tomarlos todos iguales a $p_0 + tD_i$.

Si $F_i \cap F_i^e \neq \emptyset$, es imposible que la nueva empresa capture consumidores en i. Supondremos que los nuevos centros ms cercanos a i ofertan su precio mnimo, con objeto de conseguir que el beneficio de los centros ya existentes sea tan bajo como sea posible.

El problema de localizacin

Como acabamos de ver, la nueva empresa slo puede conseguir demanda en i si localiza un centro en el nodo j tal que $d_{ij} < D_i$ y oferta el precio $p_{ij} = p_0 + tD_i$. Definamos los conjuntos $L_i^< = \{j \in L : d_{ij} < D_i\}$ y $C^* = \{i \in C : L_i^< \neq \emptyset\}$. El primero es el conjunto de las posibles localizaciones donde la firma entrante puede capturar el mercado en i, el segundo representa el conjunto de nodos en los que la nueva firma puede vender el producto. Consideremos las siguientes variables:

$$
\begin{aligned}
y_j &= \begin{cases} 1 & \text{si un nuevo centro es localizado en } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
x_{ij} &= \text{proporcin de demanda en } i \text{ servida desde } j
\end{aligned}
$$

entonces, si se establecen los precios en equilibrio, el problema de localizacin se puede formular como un modelo de *Programacin Lineal Entera Mixta* de la forma siguiente:

$$
(P_1) \begin{cases}
\text{máx} & \displaystyle\sum_{i \in C^*} \sum_{j \in L_i^<} [p_0 - b + t(D_i - d_{ij})] w_i x_{ij} \\
s.a. & \displaystyle\sum_{j \in L_i^<} x_{ij} \leq 1, \quad i \in C^* \\
& x_{ij} \leq y_j, \quad i \in C^*, j \in L_i^< \\
& \displaystyle\sum_{j \in L} y_j = s \\
& x_{ij} \geq 0 \\
& y_j \in \{0, 1\}
\end{cases}
$$

Observemos que si fijamos el vector $\overline{y}$ de localizaciones, los valores ptimos de las variables x_{ij} son $\overline{x}_{ij}$, el beneficio mximo asociado a dichas localizaciones es:

$$
\Pi(\overline{y}) = \sum_{i \in C^*} \sum_{j \in L_i^<} [p_0 - b + t(D_i - d_{ij})] w_i \overline{x}_{ij} \tag{3}
$$

5.2. Formulacin para la regla equitativa

Competencia en precio

Si $F_i \cap F_i^e = \emptyset$, de la misma forma que antes, se obtiene que la estrategia ptima para los precios en la zona i es ofertar el precio $p_{ih} = p_{min} + tD_i$, para al menos un h en F_i. Los precios en el resto de los centros pueden ser arbitrarios.

Si $F_i \cap F_i^e \neq \emptyset$, la nueva firma debe fijar el precio en su cota inferior para todos sus centros en F_i. Como ahora $d_{ih} = D_i, \forall h \in F_i$, resulta que $p_{ih} = p_0 + tD_i$ para cualquier centro de la nueva empresa que pertenezca al conjunto F_i. Los precios en los otros centros pueden ser arbitrarios.

El problema de localizacin

Con la regla equitativa, la nueva empresa puede conseguir demanda en i si un nuevo centro es localizado en j de forma que $d_{ij} < D_i$ (toda la demanda en i capturada), o bien $d_{ij} = D_i$ (el mercado ser repartido con algunos de los competidores). En ambos casos ofertar el precio $p_{ij} = p_0 + tD_i$. Ahora, adems del conjunto $L_i^<$, definido en la subseccin 5.1, tenemos que considerar $L_i^= = \{j \in L : d_{ij} = D_i\}$ y tomar $C^* = \{i : L_i^< \cup L_i^= \neq \emptyset\}$.

Para poder formular el modelo de localizacin como un problema de *Programacin Lineal Entera Mixta*, necesitamos estimar la proporcin de demanda capturada por la nueva firma si hay empates en precio y distancia entre centros nuevos y existentes. El valor de dicha estimacin lo denotaremos por θ_i. Si adems de las variables consideradas en 5.1 definimos las siguientes:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el mercado en } i \text{ es repartido entre} \\ & \text{centros nuevos y existentes} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

el problema de localizacin se puede formular como el anterior, pero tomando como funcin objetivo:

$$\text{máx} \sum_{i \in C^*} \sum_{j \in L_i^<} [p_0 - b + t(D_i - d_{ij})] w_i x_{ij} + \sum_{i \in C^*} (p_0 - b) w_i \theta_i x_i$$

y adaptando las restricciones para que en caso de empates, la demanda se reparta.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnologa de Espaa bajo el proyecto de investigacin BEC2002-01026, en colaboracin con el Fondo de Desarrollo Regional Europeo (FEDER).

Referencias

[1] Brimberg, J., Dowling, P.D. y Love, R.F. The weighted one-two norm distance model: Empirical validation and confidence interval estimation. *Location Science*, 2:91–100, 1994.

[2] Daskin, M.S. *Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications*. John Wiley and Sons, New York, 1995.

[3] Drezner, Z. y Hamacher H. W. eds. *Facility Location: Application and Theory*. Springer, 2002.

[4] Eiselt, H.A., Laporte, G. y Thisse, J.-F. Competitive Location Models: A Framework and Bibliography. *Transportation Science*, 27:44–54, 1993.

[5] Eiselt, H.A. y Laporte G. Equilibrium results in competitive location models. *Middle East FORUM*, 1:63–92, 1996.

[6] Fernndez, J., Fernndez, P. y Pelegrn, B. Estimating actual distances by norm functions: a comparison between the $l_{k,p,b}$-norm and the $l_{b_1,b_2,q}$-norm and a study about the selection of the data set. *Computers and Operations Research*, 29:609–623, 2002.

[7] HamacherH.W. y Nickel, S. Classification of location models. *Location Science* 6:229–242, 1998.

[8] Hotelling, H. Stability in Competition. *Economic Journal*, 39:41–57, 1929.

[9] Lederer, P.J. y Thisse, J.F. Competitive Location on Networks under Delivered Pricing. *Operations Research Letters*, 9:147–153, 1990.

[10] Mirchandani P.B. y Francis R.L. *Discrete Location Theory*. John Wiley and Sons, 1990.

[11] Pelegrn B., Cnovas L. y Fernndez P. *Algoritmos en Grafos y Redes*. PPU, 1992.

[12] Plastria, F. Static Competitive Facility Location: An Overview of Optimisation Approaches. *European Journal of Operational Research*, 129:461–470, 2001.