

Tutorial: Localización de *concentradores*

Lázaro Cánovas
Dpto. Estadística e I.O.
Universidad de Murcia
lcanovas@um.es

Sergio García
Dpto. Estadística e I.O.
Universidad de Murcia
sgarcia@um.es

Alfredo Marín
Dpto. Estadística e I.O.
Universidad de Murcia
amarin@um.es

Resumen

Los problemas de *localización de concentradores* aparecen en muchas situaciones reales. Todas ellas tienen en común que se debe enviar un determinado bien o producto entre todos los nodos de una determinada red, pero este envío ha de realizarse necesariamente a través de unos nodos especiales que denominaremos *concentradores* (en inglés, *hubs*). Estos nodos especiales tienen como función la de aglutinar el producto y distribuirlo entre los nodos destino y otros concentradores que lo distribuyan a su vez entre los destinos. Entre las situaciones clásicas donde aparece la localización de concentradores podríamos citar las telecomunicaciones (intercambio de datos entre terminales), el transporte (tráfico aéreo de pasajeros) y el correo postal (envío de cartas y paquetes). Todos estos problemas tienen en común que debe mandarse un producto entre cada par de puntos (nodos), no pudiendo hacerlo directamente sino a través de los nodos localizados como concentradores, puntos especiales que actúan como terminales de transbordo, esto es, recogiendo y redistribuyendo los productos que se deben mandar. Entra en juego entonces una economía de escalas, y los transportes entre concentradores se benefician de un factor de descuento.

1. Introducción

El problema de localización de concentradores surge con un trabajo seminal de O'Kelly (28) continuo y otro trabajo del mismo autor (29) discreto. Posteriormente Aykin en ((1), (2)) presenta la primera formulación como problema cuadrático. En 1994, Campbell ((5), (6)) introdujo las primeras formulaciones de programación lineal entera. Durante la década de los 90 del siglo XX aparecen publicadas dos revisiones, una de Klincewicz (22) donde se realiza una revisión en el área de las telecomunicaciones, incluyendo el diseño de la red y la localización de los nodos concentradores, y otra revisión de Bryan y O'Kelly (11) en el contexto del transporte aéreo. Desde entonces han sido numerosos los artículos referidos al problema de localización de concentradores (por ejemplo (28), (7)).

2. Descripción

Consideremos un grafo $G = (V, A)$ completo, con $|V| = n$. Entre cada par de vértices i y j existe una cantidad de producto w_{ij} que debe ser enviado desde i hasta j , y salvo que i o j sean concentradores, este envío debe ser realizado empleando al menos un concentrador intermedio y un máximo de dos concentradores. Además, salvo mención expresa de lo contrario, se asumirá que los costes asociados a los arcos satisfacen la desigualdad triangular (y nos referiremos a ellos como costes euclídeos).

El valor $c_{ij} \geq 0$ representará el coste por unidad de producto asociado al uso del arco (i, j) . Asimismo, en función del tramo de la ruta al que corresponda el arco, se aplicará un factor de proporcionalidad:

- *factor de recolección* χ si el arco conduce desde un nodo de origen no concentrador hasta un concentrador,
- *factor de descuento* α si el arco une dos concentradores,
- *factor de distribución* δ si el arco lleva desde un concentrador hasta un nodo de destino.

donde $\chi, \delta > \alpha > 0$.

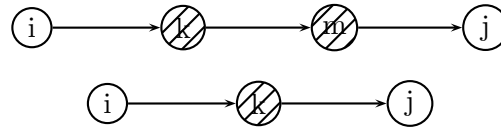
En consecuencia, el coste de enviar w_{ij} unidades de producto desde el nodo de origen i hasta el nodo de destino j a través de los concentradores k y m (en este orden) es:

$$C_{ijkm} = w_{ij} (\chi c_{ik} + \delta c_{km} + \alpha c_{mj}).$$

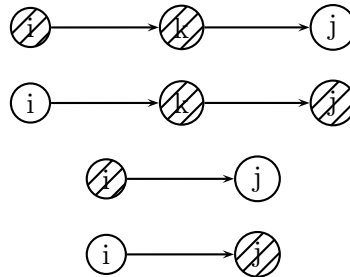
Respecto al número de concentradores a localizar existen dos variedades del problema. Puede estar prefijado el número p de concentradores a localizar, o bien se paga un coste $f_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$, por establecer un concentrador en el nodo k .

Una vez el conjunto de concentradores ha sido establecido, el flujo entre cada par de nodos debe mandarse a través de un mínimo de uno y un máximo de dos concentradores. En concreto:

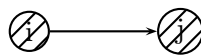
- (i) si ni el origen ni el destino son concentradores, entonces el flujo debe ir a través de uno o dos concentradores intermedios;



- (ii) si el origen o el destino (pero no ambos) son concentradores, entonces el flujo puede enviarse directamente o se puede usar un concentrador adicional;



- (iii) si tanto el origen como el destino son concentradores, entonces el flujo debe viajar directamente de un nodo al otro.



Cuando los costes c están basados en distancias (satisfacen la desigualdad triangular) entonces la solución óptima no contendrá una ruta que pase por más de dos concentradores. En otro caso, esta condición debe ser impuesta como restricción al modelo.

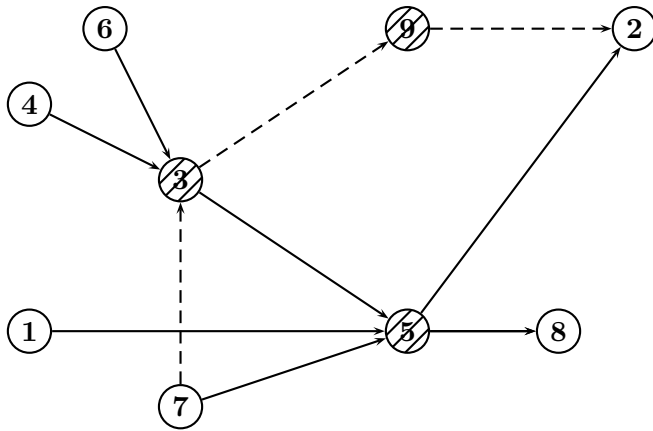


Figura 1: Ejemplo de asignaciones

3. Clasificación de los problemas

En un problema de localización de concentradores existen varios aspectos a considerar:

- *número de concentradores*: la cantidad de concentradores a ubicar puede fijarse de antemano en p . Entonces le llamaremos *problema de p -concentradores*; sin embargo, en este último caso se asocia a cada nodo un coste de apertura, fijo para cada nodo, a pagar en caso de establecer un concentrador en éste.
- *asignación*: la asignación puede ser *simple* o *múltiple*. En la figura (1) se muestra los dos tipos de asignación. Cuando cada nodo sólo puede estar conectado a un concentrador, tanto para enviar como para recibir, diremos que se trata de *asignación simple*. Este hecho se ilustra en la figura (1): los nodos 1, 3, 6 y 8 están conectados a un solo concentrador, y así todo el producto que recibe el nodo 8 debe venir enrutado por el concentrador 5, y todo el producto que envíen los nodos 4 y 6 debe ser enrutado por el concentrador 3. Por el contrario, hay problemas donde se puede permitir que un nodo pueda emplear un concentrador o más concentradores, tanto para recibir como para enviar. Cuando se permite que un nodo pueda estar asignado a más de un concentrador, diremos que se trata de *asignación múltiple*. En la figura (1) podemos observar que el vértice 7 está asignado a los concentradores 3 y 5. Y el nodo 2 recibe producto de los concentradores 9 y 5.
- *limitaciones de capacidad*: existe la posibilidad de imponer restricciones de capacidad sobre los arcos (cuánta cantidad de producto puede circular) o de los niveles de entrada y salida en los concentradores (cuánto producto puede recibir o enviar).

Más información puede ser encontrada en el capítulo 2 *Localización de Concentradores Avances en Localización del Avances de localización de servicios y aplicaciones* (9), donde se encuen-

tra lo expuesto en este tutorial mucho más detallado y extendido. Allí se pueden encontrar las diferentes formulaciones.

Agradecimientos

La labor de investigación de los autores ha sido cofinanciada por el Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica (I+D+I) y por los fondos europeos FEDER, mediante el proyecto TIC2003-05982-C05-03.

Referencias

- [1] T. Aykin. On the location of hubs facilities. *Transportation Science*, 22:155–157, 1988.
- [2] T. Aykin. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 46:409–411, 1990.
- [3] T. Aykin. Networking policies for hub-and-spoke systems with application to the air transportation system. *Transportation Science*, 29(3):201–221, 1995.
- [4] Natashaia Boland, Mohan Krishnamoorthy, Andreas T. Ernst, and Jamie Ebery. Preprocessing and cutting for multiple allocation hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 155(3):638–653, 2004. To appear in *European Journal of Operational Research*. Available online at www.sciencedirect.com.
- [5] James F. Campbell. Hub location and the p-hub median problem. *Operations Research*, 44(6):923–935, 1994.
- [6] James F. Campbell. Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72:387–405, 1994.
- [7] James F. Campbell, Andreas T. Ernst, and Mohan Krishnamoorthy. Hub location problems. In H. Hamacher and Z. Drezner, editors, *Location Theory: Applications and Theory*, pages 373–406. Springer-Verlag, 2001.
- [8] Lázaro Cánovas, Sergio García, and Alfredo Marín. Solving the uncapacitated multiple allocation hub location problem by means of a dual-ascent technique. Submitted for publication. Available in http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2004/01/812.html, 2004.
- [9] Lázaro Cánovas, Sergio García, and Alfredo Marín. *Avances en localización de servicios y sus aplicaciones (Advances in facility location and its applications)*, chapter Localización de concentradores (Hub location), pages 35–58. Servicio de publicaciones de la Universidad de Murcia, 2004. ISBN 84-8371-507-4.
- [10] Lázaro Cánovas, Mercedes Landete, and Alfredo Marín. New formulations for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *European Journal of Operational Research*, 2005. To appear. Available online.
- [11] M.E. O’Kelly D.L. Bryan. Hub-and-spoke networks in air transportation: An analytical review. *Journal of Regional Science*, 39(2):275–195, 1999.
- [12] Jamie Ebery, Mohan Krishnamoorthy, Andreas Ernst, and Natashaia Boland. The capacitated multiple allocation hub location problem: formulation and algorithms. *European Journal of Operational Research*, 120:614–631, 2000.

- [13] Donald Erlenkotter. A dual-based procedure for uncapacitated facility location. *Operations Research*, 26(6):992–1009, 1978.
- [14] Andreas Ernst and Mohan Krishnamoorthy. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p -hub median problem. *Location Science*, 4(3):139 – 154, 1996.
- [15] Andreas T. Ernst and M. Krishnamoorthy. Solution algorithms for the capacitated single allocation hub location problem. *Annals of Operations Research*, 86:141–159, 1999.
- [16] Andreas T. Ernst and Mohan Krishnamoorthy. Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p -hub median problem. *European Journal of Operational Research*, 104:100–112, 1998.
- [17] Horst W. Hamacher, Martine Labbé, Stefan Nickel, and Tim Sonneborn. Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems. *Discrete Applied Mathematics*, 145:104–116, 2004.
- [18] Patrick Jaillet, Gao Song, and Gang Yu. Airline network design and hub location problems. *Location Science*, 4(3):195–212, 1996.
- [19] J.G. Klincewicz. Heuristics for the p -hub location problem. *European Journal of Operational Research*, 53:25–37, 1991.
- [20] John G. Klincewicz. Avoiding local optima in the p -hub location problem using tabu search and GRASP. *Annals of Operations Research*, 40:283 – 302, 1992.
- [21] John G. Klincewicz. A dual algorithm for the uncapacitated hub location problem. *Location Science*, 4(3):173–184, 1996.
- [22] John G. Klincewicz. Hub location in backbone/tributary network design: A review. *Location Science*, 6:307–335, 1998.
- [23] Youngho Lee, Byung Ha Lim, and June S. Park. A hub location problem in designing digital data service networks: Lagrangian relaxation approach. *Location Science*, 4(3):185–194, 1996.
- [24] Alfredo Marín. Uncapacitated hub location: enforced formulation, new facets and a branch-and-cut-and-relax algorithm. Submitted for publication, 2003.
- [25] Gabriela Mayer and Bernd Wagner. HubLocator: An exact solution method for the multiple allocation hub location problem. *Computers and Operations Research*, 29:715–739, 2002.
- [26] Stefan Nickel, Anita Schöbel, and Tim Sonneborn. Hub location problems in urban traffic networks. In Niitthymahi and Pursula, editors, *Mathematical Methods and Optimisation in Transportation Systems*, pages 1–12. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [27] M.E. O’Kelly. Activity levels at hub facilities in interacting networks. *Geographical Analysis*, 18(4):343–356, 1986.
- [28] M.E. O’Kelly. The location of interacting hub facilities. *Transportation Science*, 20(2):92–106, 1986.
- [29] Morton O’Kelly. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32:393–404, 1987.
- [30] Morton O’Kelly, D. Bryan, D. Skorin-Kapov, and J. Skorin-Kapov. Hub network design with single and multiple allocation: a computational study. *Location Science*, 4(3):125–138, 1996.

- [31] Morton O’Kelly, Darko Skorin-Kapov, and Jadranka Skorin-Kapov. Lower bounds for the hub location problem. *Management Science*, 41(4):713 – 721, 1995.
- [32] Illia Racunica and Laura Wynter. Optimal location of intermodal freight hubs. Available at http://optimization-online.org/DB_HTML/2001/01/263.html, 2001.
- [33] Mihiro Sasaki, Atsuo Suzuki, and Zvi Drezner. On the selection of hub airports for an airline hub-and-spoke system. *Computers and Operations Research*, 26:1411–1422, 1999.
- [34] D. Skorin-Kapov, J. Skorin-Kapov, and M.E. O’Kelly. Tight linear programming relaxations of uncapacitated p -hub median problems. *European Journal of Operational Research*, 94:582–593, 1996.
- [35] Darko Skorin-Kapov and Jadranka Skorin-Kapov. On tabu search for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 73:502 – 509, 1994.
- [36] Kate Smith, M. Krishnamoorthy, and M. Palaniswami. Neural versus traditional approaches to the location of interacting hub facilities. *Location Science*, 4(3):155–171, 1996.
- [37] Jinhyeon Sohn and Sungsoo Park. Efficient solution procedure and reduced size formulations for p -hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 108:118–126, 1998.
- [38] Jinhyeon Sohn and Sungsoo Park. The single allocation problem in interacting three-hub network. *Networks*, 35(1):17–25, 2000.