El problema de Mediana ordenada en localización

Justo Puerto Albandoz
Facultad de Matemáticas,
Universidad de Sevilla
puerto@us.es

Resumen

Este tutorial introduce al lector en el fascinante mundo de la Teoría de la Localización mediante el uso de la función de mediana ordenada. En él se presentan propiedades básicas que despertarán la curiosidad por conocer más de esta potente herramienta de análisis de los problemas de localización.

1. Introducción

La Teoría de Localización es casi tan antigua como las matemáticas aunque su mayor desarrollo se ha producido en los treinta últimos años del siglo XX. Actualmente, sin temor a equivocarnos, se puede decir que se trata de un área de investigación muy activa dentro de la Investigación Operativa (IO). Testigos de este desarrollo son los artículos publicados en revistas científicas de primera línea, así como los libros dedicados a este tema. Esta creciente actividad ha sido reconocida por la American Mathematical Society (AMS) de manera que desde 1990 ha reservado en sus clasificaciones los códigos 90B85-Problemas de localización continua y 90B90-Problemas de localización discreta. Existen un gran número de aplicaciones de esta teoría a campos tan diversos como: distribución o logística, estimación estadística, análisis regional... Excelentes monografías que cubren las diferentes vertientes de estos problemas se pueden hallar en (7), (19) o (22).

Una gran parte de los problemas de localización comparten propiedades intrínsecas que van más allá de la existencia de una demanda que debe ser satisfecha por unos centros de servicio que hay que ubicar. Sin embargo el desarrollo de la Teoría de la Localización se ha producido atendiendo a problemas específicos. De este modo, es difícil hallar en la literatura resultados estructurales que pongan de manifiesto las propiedades comunes y las posibilidades de un análisis integral de muchos de los diferentes aspectos de esta teoría.

El objetivo de este tutorial es mostrar como el uso de la función de *mediana ordenada* permite desarrollar una teoría unificada para el análisis de los problemas de localización. Introduciremos un marco teórico común, a través de los problemas de localización de la mediana ordenada, que hará posible un análisis algebraico de los problemas de localización además de sugerir nuevos problemas no considerados previamente en la literatura.

Un problema de localización depende de un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_M\}$ de clientes que requieren algún servicio y se trata de buscar la ubicación de otro conjunto $L = \{x_1, \ldots, x_N\}$ desde donde se satisfará la demanda. La calidad de una solución se evalúa mediante una función $c(A, L) = (c(a_1, L), \ldots, c(a_N, L))$ que expresa tiempo de viaje, distancia, coste, preferencias en general. Tradicionalmente se supone que la calidad del servicio depende monótonamente de las componentes del vector c. De esta forma, desde el punto de vista de los clientes, requeriremos un principio de monotonía: a mayores valores del vector c menor calidad del servicio proporcionado (suponiendo servicios atractivos). Por otra parte, desde la posición del grupo (los clientes vistos como una colectividad), la calidad no debería depender del nombre asignado a cada uno de ellos. Por lo tanto, también debemos exigir un cierto principio de simetría (véase (17)). Estos dos principios han sido utilizados con anterioridad en la literatura de localización y su uso es bastante aceptado (véase (3), (4), (5) o (23)). Veremos que la aceptación de estos dos principios de racionalidad nos conducirá de forma natural a considerar los problemas de mediana ordenada, que son mucho más que una mera generalización de algunos problemas clásicos en teoría de localización.

Por supuesto, la principal dificultad de este análisis no es sólo formular el problema general y sus características, sino encontrar propiedades estructurales comunes y desarrollar algoritmos de solución para estos problemas independientemente de los espacios donde éstos sean considerados. Éste será el objetivo del resto de las secciones de este tutorial.

En este tutorial se presentan ideas introductorias sobre la función de mediana ordenada y sus propiedades básicas al ser aplicada en el contexto de la Teoría de la Localización. El lector interesado en un análisis exhaustivo de las posibilidades de los problemas de mediana ordenada puede consultar la reciente monografía de Nickel y Puerto (19).

2. La función de mediana ordenada

En esta sección introducimos la familia de funciones de mediana ordenada. Esta familia satisface los dos principios de racionalidad enunciados en la introducción: monotonía y simetría. Se trata de funciones no lineales que dependen de las componentes ordenadas de cada vector donde se aplican. Esta ordenación induce un cierto grado de complicación en su representación explícita. Sin embargo, es lo que permite que se verifique el principio de simetría requerido anteriormente. Revisaremos algunas propiedades de las mismas, como un paso previo para entender su comportamiento, y posteriormente proporcionaremos una caracterización axiomática.

La función de mediana ordenada ($\mathsf{OMF}(\cdot)$) es una media ponderada de valores ordenados. Para cualquier $x \in \mathbb{R}^M$ denotamos por $x_{ord} = (x_{(1)}, \ldots, x_{(M)})$ donde $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots x_{(M)}$, al vector de componentes ordenadas de x . Consideremos la función:

$$\begin{array}{rcl} sort_M : \mathbb{R}^M & \longrightarrow & \mathbb{R}^M \\ x & \longrightarrow & x_{ord}. \end{array} \tag{1}$$

Definición 1. *La función $f_\lambda : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de mediana ordenada, abreviadamente $f_\lambda \in \mathsf{OMF}(M)$, si $f_\lambda(x) = \langle \lambda, sort_M(x) \rangle$ para algún $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \in \mathbb{R}^M$.*

Está claro que las funciones de mediana ordenada son no lineales. Este hecho está inducido por el ordenamiento. Una de sus consecuencias es que la representación pseudolineal de las mismas, que aparece en su definición, está definida puntualmente. Aunque no resulta muy difícil identificar los dominios de linealidad de estas funciones. Éstos proporcionan una división del espacio en celdas donde las funciones son lineales. Obviamente, la topología de estas funciones depende del espacio de soluciones, de la función de distancia y de los vectores de parámetros. También es obvio que diferentes elecciones del vector λ dan lugar a diferentes funciones dentro de la misma familia. Así $\lambda = (1/M, \ldots, 1/M)$ da lugar a la función promedio, $\lambda = (0, \ldots, 0, 1)$

es la función máximo, $\lambda = (1, 0, \ldots, 0, 0)$ es la función mínimo, $\lambda = (\alpha, \ldots, \alpha, \alpha, 1)$ es la función α-centdian, $\lambda = (0, \ldots, 0, 1, \overset{k}{\ldots}, 1)$ es el objetivo k-centrum, $\lambda = (-1, 0, \ldots, 0, 1)$ es la función rango, $\lambda = (\alpha, 0, \ldots, 0, 1 - \alpha)$ corresponde al criterio de Hurwicz, $\lambda = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ es la media recortada y definida sobre un dominio compacto, si $\lambda_1 \gg \lambda_2 \gg \ldots \gg \lambda_M$ es el mínimo lexicográfico, entre otras.

Operadores relacionados con la función de mediana ordenada han sido desarrollados independientemente por varios autores. Este es el caso de los operadores OWA (ordered weighted average) estudiados en (27) para agregar preferencias semánticas en el contexto de inteligencia artificial; de las funciones SAND introducidas en (12) para estudiar los errores de agregación en modelos de localización multi-servidor o los problemas de localización ordenada (2), (15), (16), (18) o (24).

Para continuar el análisis de las funciones $\mathsf{OMF}(\cdot)$ necesitamos introducir alguna notación adicional. Consideraremos en $\mathbb{R}^M$ el cono $\Lambda_M^{\leq}$:

$$\Lambda_M^{\leq} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) : 0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_M\} \tag{2}$$

Por último, sea $\mathcal{P}(1 \ldots M)$ el conjunto de todas las permutaciones de los M primeros números naturales, esto es

$$\mathcal{P}(1 \ldots M) = \{\sigma : \sigma \text{ es una permutación de } 1, \ldots, M\}. \tag{3}$$

En lo que sigue escribiremos $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(M))$ o a veces, cuando no haya motivo de confusión, simplemente $\sigma = \sigma(1), \ldots, \sigma(M)$.

Comenzamos con algunas propiedades y observaciones que aparecen de forma natural cuando se considera una familia de funciones. Algunas respuestas parciales se pueden hallar en la proposición siguiente.

Proposición 1. *Sea $f_\lambda(x), f_\mu(x) \in \mathsf{OMF}(M)$.*

1. *$f_\lambda(x)$ es una función continua.*
2. *$f_\lambda(x)$ es una función simétrica, i.e. para todo $x \in \mathbb{R}^M$*
   $f_\lambda(x) = f_\lambda(sort_M(x))$.
3. *$f_\lambda(x)$ es una función convexa sii $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_M$.*
4. *$f_\lambda(x)$ es Lipschitz para $\lambda \in S_M^{\leq}$.*
5. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. $f_\alpha(x) \in \mathsf{OMF}(1)$ sii $f_\alpha(x) = \alpha x$.*
6. *Si c_1 y c_2 son constantes positivas, entonces la función*
   $c_1 f_\lambda(x) + c_2 f_\mu(x) \in \mathsf{OMF}(M)$.
7. *Si $f_\lambda(x) \in \mathsf{OMF}(M)$ y $f_\alpha(u) \in \mathsf{OMF}(1)$, entonces la función compuesta es OMF(M) como función de x en $\mathbb{R}^M$.*
8. *Si $\{f_{\lambda^n}(x)\}$ es una sucesión de OMF(M) que converge puntualmente a una función f, entonces $f \in \mathsf{OMF}(M)$.*

Para comprender la naturaleza de la funciones $\mathsf{OMF}(\cdot)$ sería deseable una caracterización de las mismas en términos de sus propiedades intrínsecas. Dado que estas funciones admiten una representación como funciones lineales, una vez que se han reordenado sus componentes y puesto que la reordenación hace a estas funciones simétricas, es natural requerir la propiedad de simetría, junto con linealidad sobre una región específica. Estas dos propiedades son suficientes para caracterizar la familia de funciones $\mathsf{OMF}(\cdot)$.

Teorema 1. *Una función f definida sobre $\mathbb{R}^M_+$ es continua, simétrica y lineal sobre $\Lambda^{\leq}_M$ sí y sólo sí $f \in \mathsf{OMF}(M)$.*

Algunos casos particulares del vector λ tienen un interés especial para su análisis. Uno de ellos es el caso convexo. Éste corresponde con aquellos vectores λ en los que $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_M$. Para este caso se puede tener una caracterización sin el conocimiento explícito de su dominio de linealidad. Sea $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$ con $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_M$ y denotemos por *conv*(A) la envolvente convexa del conjunto A.

Teorema 2. *Una función simétrica f definida sobre $\mathbb{R}^M$ es la función de soporte del conjunto $S_\lambda = conv\{\lambda_\pi = (\lambda_{\pi(1)}, \ldots, \lambda_{\pi(M)}) : \pi \in \mathcal{P}(1...M)\}$ sí y sólo sí f es la función de mediana ordenada*

$$f_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_{(i)}. \tag{4}$$

Para el desarrollo de algoritmos eficaces se suelen requerir propiedades de convexidad o submodularidad. Al igual que la convexidad es importante en el contexto de la optimización continua, en el caso discreto su papel es reemplazado por la submodularidad. (El lector interesado puede consultar (13).) A continuación probamos esta propiedad para la familia de $\mathsf{OMF}(\cdot)$ convexas.

Sean $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, dos vectores en $\mathbb{R}^M$. Definimos los operadores mín de x, y como el vector $x \bigwedge y = (\text{mín}\{x_i, y_i\})$, y máx de x, y por $x \bigvee y = (\text{máx}\{x_i, y_i\})$. Las operaciones mín y máx definen un retículo en $\mathbb{R}^M$. El resultado siguiente, tomado de (25), prueba la submodularidad para esta clase de funciones.

Teorema 3. *(***Teorema de submodularidad***) Dado un vector $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$, verificando $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_M$. Para todo $x \in \mathbb{R}^M$ definimos la función $f_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_{(i)}$. Entonces, $f_\lambda(x)$ es submodular sobre el retículo definido por los operadores min y max, i.e., para cualquier par de vectores x, y en $\mathbb{R}^M$,*

$$f_\lambda(x \bigvee y) + f_\lambda(x \bigwedge y) \leq f_\lambda(x) + f_\lambda(y).$$

3. El problema de la mediana ordenada en espacios abstractos

Una vez que hemos estudiado propiedades de la función objetivo *mediana ordenada*, en esta sección estudiaremos los problema de localización que resultan de aplicar estas funciones objetivo en espacios abstractos. Nuestro objetivo será encontrar la estructura geométrica de los conjuntos de soluciones óptimas de esta familia de problemas. A lo largo de esta sección se hará uso de algunos resultados de análisis convexo para los que nuestra referencia será (14).

Sea X un espacio de Banach equipado con la norma $\| \ \|$; sea $A = \{a_1, \ldots, a_M\} \subset X$ un conjunto finito, con $M \geq 3$, $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$, cuyo cardinal se denotará por $|A|$.

El problema de localización definido por estos datos consiste en encontrar un punto $x \in X$ que mejor se ajusta, en algún sentido, a los puntos de A. Si admitimos que se deben cumplir los principios de monotonía y simetría, una forma natural de este problema es la minimización de una función F de la forma

$$F(x) = \gamma(d(x))$$

donde γ es una norma monótona y simétrica sobre $\mathbb{R}^M$ y $d(x) = (\|x - a\|)_{a \in A}$ es el vector de distancias en X. La mayoría de las funciones objetivo clásicas utilizadas en localización de un único servicio son casos particulares de esta formulación.

El estudio de los conjuntos de soluciones de problemas de localización no es nuevo. De hecho, pueden encontrarse en la literatura trabajos que se dedican al estudio de propiedades de los conjuntos solución de estos problemas. (10) describe el conjunto de soluciones óptimas del problema de Weber. (6), así como (11) estudian conjuntos dominantes para el problema de Weber en $\mathbb{R}^2$ con diferentes normas para medir las distancias. (1) estudia propiedades sobre el tamaño de los conjuntos de soluciones de problemas minisum y minimax en espacios normados. Asimismo (8) y (9) consideran un problema de localización en un espacio normado que consiste en la minimización de una norma monótona, aunque no necesariamente simétrica. Recientemente, (20) ha caracterizado el conjunto completo de soluciones de los problemas de localización con demanda regional.

Formalmente, el problema que nos proponemos analizar es el siguiente:

$$\inf_{x \in X} F(x). \tag{5}$$

Caracterizaciones del conjunto de soluciones de este problema también han sido estudiadas con anterioridad en la literatura. El lector interesado en un estudio exhaustivo de las mismas puede consultar (23). En este tutorial presentaremos condiciones sobre existencia y unicidad, así como una caracterización geométrica del conjunto solución basada en técnicas de análisis convexo. Ésta nos permitirá probar que el conjunto de soluciones del problema (5) coincide con las soluciones de un problema de mediana ordenada para una elección particular de los escalares λ. Esto es, existen escalares $0 \leq \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$ con $\lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots \leq \lambda_M$, tales que las soluciones óptimas del problema (5) y del problema OMP (6) coinciden. Este último problema es:

$$\inf_{x \in X} f_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i d_{(i)}(x) \tag{6}$$

donde $d_{(i)}(x) = \|x - a_{\sigma(i)}\|$ para una permutación σ de $\{1, 2, \ldots, M\}$ verificando

$$\|x - a_{\sigma(1)}\| \leq \ldots \leq \|x - a_{\sigma(M)}\|.$$

Para simplificar la presentación, al referirnos al valor óptimo del problema (6) utilizaremos la notación:

$$f_\lambda(A) := \inf_{x \in X} f_\lambda(x). \tag{7}$$

Finalmente, denotamos por $M_\gamma(A)$ y $\mathsf{M}(f_\lambda, A)$ los conjuntos de soluciones óptimas de los problemas (5) y (6), respectivamente.

$$\begin{aligned} M_\gamma(A) &= \arg\min_{x \in X} \gamma(d(x)) \\ \mathsf{M}(f_\lambda, A) &= \arg\min_{x \in X} \sum_{i=1}^{M} \lambda_i d_{(i)}(x). \end{aligned}$$

Utilizando argumentos clásicos de la geometría de espacios de Banach obtenemos:

Proposición 2. *Si X es un espacio dual (en particular: si X es reflexivo), entonces $\mathsf{M}(f_\lambda, A) \neq \emptyset$ para cualquier conjunto finito A y cualquier $\lambda \in \Lambda_M^{\leq}$.*

Observación 1. El resultado anterior es cierto, por ejemplo, si $X = l^\infty$. También, se tiene la misma propiedad si X es complementado en norma uno en el espacio bidual X^{**}. Resultados generales de este tipo pueden hallarse en (26).

El siguiente resultado prueba que también pueden obtenerse resultados de existencia en espacios sin buenas propiedades.

Teorema 4. *Si $X = c_0$, entonces para todo $A = \{a_1, \ldots, a_M\}$ y $\lambda \in S_M^{\leq}$ se tiene $\mathsf{M}(f_\lambda, A) \neq \emptyset$.*

Observación 2. Existen espacios en los que incluso para conjuntos finitos de puntos de demanda, sus centros y/o medianas no siempre existen; uno de estos espacios es una variedad lineal definida como el núcleo (kernel) de un funcional lineal definido sobre el espacio de las sucesiones convergentes a cero, c_0, considerado en (21). (Nótese que esto no contradice el teorema 4.)

3.1. Caracterización de los conjuntos de soluciones óptimas

En esta sección estudiamos los conjuntos de soluciones óptimas de los problemas (5) y (6). Este análisis hace uso principalmente de herramientas clásicas del análisis convexo (El lector no experto puede consultar (14)). Puesto que F es una función convexa, un punto x pertenecerá al conjunto de soluciones óptimas si y sólo si $0 \in \partial F(x)$. Este hecho subraya la importancia de obtener el conjunto subdiferencial de F.

Siguiendo la notación introducida por (23), dado un conjunto finito $A \subset X$ y una permutación σ, para cada $k \leq M$ y $p = (p_j)_{j \geq k}$ con $p_j \in B^*$ denotemos por

$$C_{\sigma,k}(p) = \{x \in X : \langle p_{\sigma(j)}, x - a_{\sigma(j)} \rangle = \|x - a_{\sigma(j)}\|, \ \forall j \geq k\}$$

o equivalentemente

$$C_{\sigma,k}(p) = \bigcap_{j \geq k} \Big(a_{\sigma(j)} + N(p_{\sigma(j)}) \Big)$$

y para $\lambda \in \Lambda_M^{\leq}$

$$D_k(\lambda) = \{x \in X : F(x) = \sum_{j \geq k} \lambda_j d_{(j)}(x)\}.$$

Teorema 5. *Si $M_\gamma(A)$ es no vacío entonces existe $\sigma \in \mathcal{P}(1 \ldots M)$, $p = (p_j)_{j \geq k}$ con $k \leq M$ y $p_j \in B^*$ para cada j, $\lambda \in \Lambda_M^{\leq}$, $\lambda_j = 0$ si $j < k$, $\lambda_j > 0$ si $j \geq k$ verificando $\gamma^0(\lambda) = 1$ y $0 = \sum_{j \geq k} \lambda_j p_{\sigma(j)}$ tales que*

$$M_\gamma(A) = C_{\sigma,k}(p) \cap D_k(\lambda).$$

Recíprocamente, si para algún $\sigma \in \mathcal{P}(1 \ldots M)$, $p = (p_j)_{j \geq k}$ con $k \leq M$ y $p_j \in B^*$ para cada j, y $\lambda \in \Lambda_M^{\leq}$ con $\lambda_j > 0$ si $j \geq k$ y $\gamma^0(\lambda) = 1$; el conjunto $C_{\sigma,k}(p) \cap D_k(\lambda) \neq \emptyset$ entonces

$$M_\gamma(A) = C_{\sigma,k}(p) \cap D_k(\lambda).$$

4. Conclusiones

Este tutorial aborda el estudio teórico de la función de mediana ordenada, que resulta ser una de las funciones objetivo más interesantes dentro de la Teoría de la Localización. Mediante su uso se pueden formular una gran variedad de problemas clásicos de localización, así como otros muchos sobre los cuales se tiene escasa o nula experiencia.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la red temática Análisis y Aplicaciones de Decisiones sobre Localización de Servicios y Problemas Relacionados (MTM2004-22566-E) y por el proyecto del plan nacional de matemáticas (MTM2004-0909).

Referencias

[1] Baronti, M. y Papini, P. Diameters, centers and diametrically maximal sets. *Supplemento ai Remdiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II*, 38:11–24, 1995.

[2] Boland, N., Domínguez-Marín, P., Nickel, S. y Puerto, J. Exact procedures for solving the discrete ordered median problem. Por aparecer en *Computers and Operations Research* 2005.

[3] Buhl, H. Axiomatic considerations in multiobjective location theory. *European Journal of Operational Research*, 37:363–367, 1988.

[4] Carrizosa, E., Conde, E., Fernández, F. y Puerto, J. An axiomatic approach to the centdian criterion. *Location Science*, 3:165–171, 1994.

[5] Carrizosa, E., Fernández, F. y Puerto, J. An axiomatic approach to location criteria. In Orban, F. and Rasson, J., editors, *Proceedings of the 5th Meeting of the Euro Working Group in Locational*, 1990.

[6] Drezner, Z. y Goldman, A. On the set of optimal points to weber problems. *Transportation Science*, 25:3–8, 1991.

[7] Drezner, Z. y Hamacher (Eds.), H. *Facility location - applications and theory.* Springer Verlag, 2002.

[8] Durier, R. A general framework for the one center location problem. In *Advances in Optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, pages 441–457. Springer-Verlag, 1992.

[9] Durier, R. The general one center location problem,. *Mathematics of Operations Research*, 20:400–414, 1995.

[10] Durier, R. y Michelot, C. Geometrical properties of the fermat–weber problem. *European Journal of Operational Research*, 20:332–343, 1985.

[11] Durier, R. y Michelot, C. On the set of optimal points to weber problems: Further results. *Transportation Science*, 28:141–149, 1994.

[12] Francis, R., Lowe, T. y Tamir, A. Aggregation error bounds for a class of location models. *Operations Research*, 48:294–307, 2000.

[13] Groetschel, M., Lovasz, L. y Schrijver, A. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization.* Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[14] Hiriart-Urruty, J. y Lemarechal, C. *Convex Analysis and minimization algorithms.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[15] Kalcsics, J., Nickel, S. y Puerto, J. Multi-facility ordered median problems: A further analysis. *Networks*, 41(1):1–12, 2003.

[16] Kalcsics, J., Nickel, S., Puerto, J. y Tamir, A. Algorithmic results for ordered median problems defined on networks and the plane. *Operations Research Letters*, 30:149–158, 2002.

[17] Milnor, J. Games against nature in decision processes. In Thrall, Coombs, and Davis, editors, *Decision Processes.* John Wiley, 1954.

[18] Nickel, S. y Puerto, J. A unified approach to network location problems. *Networks*, 34:283–290, 1999.

[19] Nickel, S. y Puerto, J. Location Theory: A unified approach. Springer-Verlag, Heidelberg, 2005.

[20] Nickel, S., Puerto, J. y Rodríguez-Chía, A. An approach to location models involving sets as existing facilities. *Mathematics of Operations Research*, 28(4):693–715, 2003.

[21] Papini, P. Existence of centers and medians. Preprint, 2001.

[22] Puerto, J. Lecturas en teoría de localización. Technical report, Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones. (Ed. Justo Puerto), 1996.

[23] Puerto, J. y Fernández, F. Geometrical properties of the symmetric single facility location problem. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 1(3):321–342, 2000.

[24] Puerto, J., Rodríguez-Chía, A. y Fernández-Palacín, F. Ordered weber problems with attraction and repulsion. *Studies in Locational Analysis*, (11):127–141, 1997.

[25] Puerto, J. y Tamir, A. Locating tree-shaped facilities using the ordered median objective. *Mathematical Programming*, 313-338, 2004.

[26] Veselý, L. Generalized centers of finite sets in banach spaces. *Acta Math. Univ. Comenian. N.S.*, 66:83–95, 1997.

[27] Yager, R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Trans. Sys. Man Cybern.*, 18:183–190, 1988.