Localización de estructuras nocivas: una perspectiva desde la Geometría Computacional

José Miguel Díaz-Báñez
Dpto. Matemática Aplicada II.
Universidad de Sevilla.
dbanez@us.es

Inmaculada Ventura
Dpto. de Matemáticas.
Universidad de Huelva.
inmaculada.ventura@dmat.uhu.es

Resumen

En este trabajo se pretende dar una visión panorámica de los resultados existentes sobre problemas de localización continua no puntual cuando se utiliza el criterio maximin. Revisamos sin detalle el tratamiento dado desde el punto de vista de la Geometría Computacional, destacando las técnicas y metodología más utilizadas. Observaremos que cada problema de optimización puede redefinirse de forma geométrica y, de este modo, el uso de estructuras y patrones algorítmicos utilizados en geometría computacional, proporcionan métodos eficientes de resolución.

1. Introducción

Galileo decía: "el libro de la naturaleza está escrito en los caracteres de la Geometría". En este resumen revisamos ciertos problemas de ubicación óptima de recursos en términos de patrones y comportamientos geométricos. Las versiones clásicas de problemas de *Localización de Servicios* (localización puntual) consideran la posición óptima de uno o varios puntos sobre un espacio prefijado. Una extensión natural de estos problemas aparece cuando el servicio a instalar no puede ser representado por puntos sino que se requiere un modelo más complejo, como puede ser un objeto o estructura dimensional (localización no puntual). En [11, 13] puede consultarse el estado del arte actual para problemas de localización no puntual en espacios continuos. El uso de la geometría intrínseca del objeto a ubicar resulta esencial para el diseño de algoritmos eficientes. En este sentido, muchos de estos problemas, pertenecientes al área de *Optimización Geométrica*, han sido considerados por la comunidad de *Geometría Computacional*, especialmente el caso de problemas en espacios continuos. El sub-área que aquí nos ocupa, *ubicación de estructuras nocivas en un espacio continuo*, ha sido considerado recientemente, y en [19] aparece una recensión completa sobre el material actualmente publicado.

Formalmente, el modelo general de los problemas aquí tratados es el siguiente:

Dado un conjunto de puntos (u objetos) $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ en el plano, encontrar un objeto o estructura E, sometido a un conjunto de restricciones $\mathcal{R}$, que resuelva el problema MAXIMIN:

$$\max_{E \subset \mathcal{R}} \min_{i} d(p_i, E), \qquad d(p_i, E) = \min_{x \in E} d_2(p_i, x).$$

donde $d_2(.,.)$ denota la distancia euclídea entre puntos de $\mathbb{R}^2$.

El modelo de computación que usaremos es el RAM real (el más usado en Geometría Computacional). En general, en los resultados nos referiremos a la complejidad temporal puesto que la complejidad espacial será proporcional a la cantidad de datos de la entrada del problema, o sea de orden lineal.

Formulamos los problemas para estructuras tales como rectas, semirrectas, segmentos, circunferencias, curvas poligonales, etc.

2. Ubicación de estructuras lineales

2.1. La recta maximin

El problema de encontrar la recta que maximiza la mínima distancia a un conjunto de puntos $\mathcal{P}$ en el plano es equivalente al problema geométrico de encontrar la mayor banda vacía para el conjunto de puntos dados. Para garantizar la existencia de solución del problema se exige que la banda interseque a la envolvente convexa de $\mathcal{P}$.

En [16] se plantea el problema como el *corredor vacío más ancho a través de un conjunto de puntos*, donde por corredor se entiende la zona del plano determinada por dos rectas paralelas. Proponen un algoritmo eficiente, de tiempo $O(n^2)$, que transforma el problema a una búsqueda en el arreglo de rectas del espacio dual. Resulta interesante destacar que esta cota aún no ha sido mejorada. Nótese que el problema análogo con criterio minimax, la recta centro, se resuelve en tiempo óptimo $O(n \log n)$ [18].

2.1.1. La recta maximin con demanda poligonal

Una extensión interesante, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, del problema anterior es la siguiente:
Dado un conjunto $\mathcal{P}$ de m polígonos (no necesariamente disjuntos y convexos) con un total de n vértices, encontrar una recta l que interseque el interior de $CH(\mathcal{P})$ tal que $\min_{P \in \mathcal{P}} d(P, l)$ es máximo.

Este problema se puede interpretar como el *corredor máximo vacío a través de un conjunto de obstáculos*. En [12] se resuelve en tiempo $O((m^2 + n \log m) \log n)$. Una observación interesante es que, si el número de polígonos m es mucho menor que el número total de vértices n, $m^2 < n$, se obtiene por primera vez un algoritmo sub-cuadrático.

2.2. Ubicación de semirrectas

El problema consiste en encontrar una semirrecta con origen en un punto prefijado del plano o, que se considera, sin pérdida de generalidad, el origen de coordenadas, de forma que se maximize la mínima distancia de los puntos dados a la semirrecta. El problema geométrico análogo es encontrar el mayor semi-cilindro plano vacío y anclado en o que se conoce como "silo". Este problema surgió como aplicación de un problema de robótica en neurocirugía. Está resuelto en [15] con un algoritmo óptimo, $\Theta(n \log n)$, que se basa en un método muy extendido en geometría computacional. Se trata de reducir el problema al cálculo de la envolvente inferior de un conjunto de funciones distancia de punto a semirrecta anclada.

3. Ubicación de segmentos

Un estudio sobre problemas de ubicación de segmentos "nocivos" de longitud fijada basados en el criterio maximin se ha llevando a cabo en [19]. El caso del *segmento maximin anclado*, esto es, *encontrar un segmento de longitud fijada y anclado en un punto dado, que maximice la mínima distancia a los puntos del conjunto de partida*, puede consultarse en [2], donde se demuestran las condiciones necesarias para que, haciendo un barrido sobre el arreglo de la envolvente inferior de las funciones distancia de los puntos a un segmento anclado, el problema pueda resolverse con un algoritmo óptimo de complejidad $\Theta(n \log n)$. El caso del *segmento maximin orientado*, esto es, se conoce la dirección de la recta que contiene al segmento, se resuelve de nuevo en tiempo óptimo $\Theta(n \log n)$ utilizando el diagama de Voronoi de segmentos [19]. Si el segmento es libre, sólo está fijada su longitud, se resuelve en tiempo $O(n^4 log^2 n)$, utilizando un preprocesamiento del conjunto de n puntos, en tiempo $O(n^2)$, haciendo uso de una estructura de datos de tamaño $O(n^2)$.

Otro caso estudiado se refiere al problema de *segmento maximin que conecta un punto y una curva fijados*, (la longitud ahora no es constante). En [7] se introduce una estructura nueva denominada, *el diagrama de Voronoi anclado*, que se define siguiendo el formato de los diagramas de Voronoi abstractos definidos en [17]. Estos diagramas no se definen en base a un conjunto de puntos o generadores, sino en función de un conjunto de curvas conocidas como *curvas bisectoras*. En [7] se demuestra que tal estructura puede construirse en tiempo $O(n \log n)$, lo que da lugar a un algoritmo lineal para resolver el problema de optimización, sin más que restringir la búsqueda del punto extremo del segmento que cae sobre la curva, a los puntos de intersección de ésta con las aristas del diagrama de Voronoi anclado. Por tanto, la complejidad global resulta ser de tiempo $O(n \log n)$.

4. Circunferencia maximin

El problema de la *circunferencia nociva* se ha estudiado en [9]. En un marco geométrico, el problema es equivalente a encontrar *la corona circular de mayor área que no contiene puntos en su interior*. Con objeto de tener el problema bien definido, se supone la existencia de puntos dentro del círculo interior y fuera del exterior. Usando una caracterización geométrica de una solución óptima resuelven el problema en tiempo $O(n^3 \log n)$.

Si lo que se busca es la corona óptima que contiene exactamente k puntos en su interior, donde k es una constante fijada, ésta se puede encontrar en tiempo $O(n \log n)$, usando el diagrama de Voronoi de orden $k + 1$ [9]. Este problema, aunque planteado como problema de ubicación de servicios, está relacionado con los problemas de agrupación o *clustering*.

5. Ubicación de curvas poligonales

Una extensión natural de los problemas de localización de servicios lineales en el plano es la ubicación de estructuras poligonales, que proporcionan para distintos criterios de ajuste, la mejor aproximación del conjunto de puntos. Así, la ubicación óptima de una ruta poligonal a través de un conjunto de puntos en el plano ha sido tratada desde diferentes puntos de vista, según los objetivos y aplicaciones a los que esté sujeto el problema. En [5] se aborda por primera vez la resolución de problemas de poligonales óptimas desde el prisma de la teoría de la localización. En ese contexto usaremos la siguiente notación:

Llamaremos $\mathcal{P} = \{a = p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1} = b\}$ al conjunto de puntos dados y denotamos por $x(q)$ a la abscisa del punto q. Además, suponemos que los puntos de $\mathcal{P}$ están dados en orden lexicográfico. Los extremos a (fuente o punto de partida del camino) y b (sumidero o punto de llegada del camino) pueden estar fijados o no y satisfacen que $x(a) < x(p_1)$ y $x(p_n) < x(b)$.

Llamaremos C a la curva poligonal y d a la medida de la distancia desde un punto a la poligonal. El problema que revisamos es maximizar la función

$$h(C) = \min_{p_m \in \mathcal{P} \setminus \{a,b\}} d(p_m, C).$$

5.1. Restricción espacial o sobre la longitud

La ubicación de rutas nocivas que conecten dos puntos dados ha sido considerado con extensión por la comunidad de localización cuando el espacio subyacente es una red o un árbol, y ha despertado gran interés por estar relacionado con el área de la *Logística*, [1, 3, 4]. En el caso continuo existen pocos trabajos, algunos de los cuales están en desarrollo en la actualidad.

En estos problemas, el camino puede ser colocado en cualquier lugar del plano. Para evitar soluciones triviales, como por ejemplo, llevar la solución al infinito, se requiere restringir el espacio donde ubicar la poligonal. Otra restricción a considerar es la longitud de la poligonal. Se han abordado dos tipos de problemas:

- *restricción espacial:* dada una región poligonal $\mathcal{R}$ y un conjunto de puntos $\mathcal{P}$ contenidos en $\mathcal{R}$, encontrar un camino poligonal C contenido en $\mathcal{R}$ que maximice la función $h(C)$, esto es,
$$\max_{C \subset \mathcal{R}} \min_{p_m \in \mathcal{P} \setminus \{a,b\}} d(p_m, C).$$
- *restricción en la longitud:* dado un valor no negativo l_0, encontrar un camino poligonal C de longitud menor o igual que l_0 que maximice la función $h(C)$, esto es,
$$\max_{C: l(C) \leq l_0} \min_{p_m \in \mathcal{P} \setminus \{a,b\}} d(p_m, C).$$

Es necesario notar que para los dos problemas anteriores, el número de codos o vértices de la poligonal a buscar no estás fijados. En [14] se propone un algoritmo aproximado para encontrar una ruta no lineal C contenida en una región poligonal $\mathcal{R}$, que puede o no contener a todos los puntos de demanda, de forma que la entrada y salida de C están determinadas por dos lados de $\mathcal{R}$. Destacamos que este tipo de problemas pueden resolverse usando el diagrama de Voronoi cuando los puntos no están ponderados. En [19] se resuelve este problema en tiempo $O(n \log n)$ basándose en que existe una ruta poligonal óptima para el problema (no es única) sobre las aristas del diagrama de Voronoi de los n puntos.

Por otra parte, el *problema con restricción de longitud* se ha resuelto en [6] con un algoritmo ε-aproximado que realiza algoritmo de bisección utilizando como sub-problema el cálculo eficiente de la trayectoria más corta que une dos puntos a través de un conjunto de obstáculos circulares.

5.2. Curvas poligonales de un codo

El problema a resolver es el siguiente:

Dada una cota l_0, calcular la ruta poligonal C de un codo que conecte los puntos a y b, tal que $l(C) \leq l_0$ y para la cual $\min_{p \in \mathcal{P}} d(p, C)$ es máximo.

Si llamamos *boomerang* al lugar geométrico de los puntos que equidistan de la poligonal de un codo que parte de a y llega a b, el problema se reduce a encontrar el "mayor boomerang vacío de puntos anclado en a y b". Éste puede formularse geométricamente de la forma siguiente:

Dada una elipse de focos a y b y eje mayor l_0, calcular la ruta poligonal C de un codo sobre la elipse que conecte los puntos a y b, tal que $\min_{p \in \mathcal{P}} d(p, C)$ *es máximo.*

En [8], basándose en propiedades geométricas del “mayor boomerang”, obtienen una cota temporal de $O(n \log n)$ cuando la longitud de la ruta nociva es exactamente l_0 (esto es, el codo se encuentra sobre la elipse de focos a y b) y $O(n^2)$ cuando la longitud puede ser menor o igual que la cota (esto es, el codo puede estar situado sobre la elipse o en el interior de ésta).

6. Problemas en 3-d

La consideración de espacios continuos distintos al plano, tales como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, es relativamente reciente. En este sentido, existe ya un conjunto considerable de trabajos que se están desarrollando paralelamente al avance de técnicas de geometría computacional en espacios más generales. Citamos aquí algunos de ellos, a riesgo de ser no rigurosos, con objeto de mostrar que puede considerarse aún como un campo poco explorado. Con respecto a la localización de rectas nocivas en espacios tridimensionales euclídeos podemos citar el trabajo [15] para el criterio maximin. En lo que se refiere a la ubicación óptima de planos nocivos en $\mathbb{R}^3$, en [10] se presenta un algoritmo de tiempo y espacio $O(n^3)$.

7. Conclusiones y posibles líneas futuras de investigación

De este resumen puede extraerse una muestra del interés que supone la interpretación y resolución de problemas desde puntos de vista distintos. En este caso, cómo en cierto tipo de problemas de Localización pueden enfocarse desde la óptica de la Geometría Computacional y utilizar los rudimentos de ésta para resolverlos computacionalmente de forma satisfactoria. Este hecho era indiscutiblemente aceptado por la comunidad de investigadores de ambas áreas para problemas de localización puntual desde el comienzo del desarrollo de la geometría computacional por la década de los 80.

Referencias

[1] Abkowitz M. and Cheng M., Developing a Risk/Cost Framework for Routing Truck Movements of Hazardous Materials. *Accident Analysis and Prevention*, 20, 39–52, 1988.

[2] Barcia J.A., Díaz-Báñez J.M., Lozano A. and Ventura I., Computing an obnoxious anchored segment, *Operations Research Letters*, 31, 293-300, 2003.

[3] Batta R. and Chiu S., Optimal Obnoxious Paths on a Network: Transportation of Hazardous Materials. *Opns. Res.*, 36, 84–92, 1988.

[4] Boffey B. and Karkazis J., Optimal Location of Routes for Vehicles: Transporting Hazardous Materials. *European J. Oper. Res.*, 201–215, 1995.

[5] Díaz-Báñez J.M., Location of Linear and Piecewise Linear Structures, *Ph.D. Thesis (en español), Universidad de Sevilla*. Sevilla. Spain. 1998.

[6] Díaz-Báñez J.M., Gómez F. y Toussaint G., Computing Shortest Paths for Transportation of Hazardous Materials in Continuous Spaces. *Journal of Food Engineering*, vol. 70, 293-298, 2005.

[7] Díaz-Báñez, J.M., Gómez F. and Ventura I., The anchored Voronoi diagram *Lecture Notes in Computer Science*, 3045, 207-216, 2004.

[8] Díaz-Báñez J.M. and Hurtado F., Computing obnoxious 1-corner polygonal chains. *Proc. 10th Encuentros de Geometría Computacional*, pp 220-224 , 2003.

[9] Díaz-Báñez J.M., Hurtado F., Meijer H., Rappaport D. and Sellarès T., The largest empty annulus problem. In *International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 13, 4, 317-325, 2003.

[10] Díaz-Bañez J.M., López M.A., Sellarès J.A., Computing largest empty slabs. *Lecture Notes in Computer Science*, 3045, 99-108, 2004.

[11] Díaz-Báñez J.M., Mesa J.A. and Shöbel A., Continuous location of dimensional structures, *European Journal of Operational Research*, 152, 22-44, 2004.

[12] Díaz-Báñez J.M., Ramos P. and Sabariego P., The Maximin Line Problem with Polygonal Demand, *XI Encuentros de Geometría Computacional*, 2005.

[13] Díaz-Bañez J.M. y Ventura I., Localización no puntual: una perspectiva desde la Geometría Computacional. En: *Avances en Localización de Servicios y sus Aplicaciones.* Editado por Blas Pelegrín Pelegrín. Publicaciones de la Universidad de Murcia, 165-190, 2004.

[14] Drezner Z. and Wesolowsky G.O., Location of an obnoxious route. *Journal Operational Research Society*, 40, 1989, 1011–1018.

[15] Follert F., Schömer E., Sellen J., Smid M., Thiel C., Elzinga J. and Hearn D.W., Computing a largest empty anchored cylinder, and related problems. *Iternant. J. Comput. Geom. Appl.*, 7, 563-580, 1997.

[16] Houle M.E. y Maciel A., Finding the Widest Empty Corridor Through a Set of Points. *Manuscript, McGill University*, 1988.

[17] Klein R., Concrete and Abstract Voronoi Diagrams over Dynamic Scenes. *Lecture Notes in Computer Science*, 400, 1989.

[18] Lee D.T. y Wu Y.F., Geometric Complexity of Some Location Problems. *Algorithmica*, 1, 193-211, 1986.

[19] Ventura, I., Ubicación de estructuras nocivas en espacios continuos. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla. Junio de 2005.