Modelos de localización con criterios de equidad

Mª Cruz López de los Mozos
Dpto. Matemática Aplicada I
Universidad de Sevilla
mclopez@us.es

Juan A. Mesa
Dpto. Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla
jmesa@us.es

Resumen

La aplicación de objetivos de equidad en localización está principalmente motivada por sus utilidad en el sector público, donde la *equidad ubicativa* es un factor importante en la provisión del servicio. En este trabajo se pretende ofrecer un breve recorrido por los distintos modelos de localización con objetivos de equidad, tanto desde el punto de vista de su formulación como de los resultados algorítmicos que sobre ellos existen.

Sevilla, enero de 2006

1 Introducción

El interés que presentan los modelos de localización con objetivos de equidad se debe fundamentalmente a sus potenciales aplicaciones en los problemas relacionados con el sector público, en donde la desigualdad en el acceso al servicio se muestra como una posible fuente de inequidad. De hecho, Savas [33] considera la equidad como una de las formas de evaluar la prestación de un servicio público. En este sentido la aplicación del concepto de *equidad ubicativa* en la provisión de servicios en este sector, tanto atractivos o deseables (educativos y de salud, por ejemplo), como nocivos (ya que incluir aspectos de equidad en el riesgo producido por este tipo de servicios reduce el rechazo que generan [32]), se ha extendido en las últimas dos décadas.

La experiencia ha demostrado que los clásicos modelos mediana (orientado al sector privado donde dominan consideraciones de eficiencia), y centro (que contempla una cierta utilidad pública del servicio al perseguir la efectividad en su localización) pueden generar soluciones insatisfactorias a efectos de equidad, ya que ninguno de ellos captura la dispersión de los usuarios respecto de la ubicación del servicio: la mediana produce una evaluación global del sistema, mientras que el centro se orienta hacia los valores extremos, ignorando los demás. El primer problema, por tanto, que se presenta al modelizar un concepto abstracto como la equidad es el de su *cuantificación*. En otras palabras, cuál o cuáles va a ser las funciones de costo que evalúen dicho concepto, y cómo se van a formular en función de las características del modelo.

Distancias, y costes, son fáciles de medir, por ello la mayoría de los problemas con objetivos de equidad pretenden minimizar la variabilidad de la distribución de distancias. Los problemas asi formulados tienen realmente objetivos de "igualdad", en el sentido de asimilar la equidad del sistema a la igualdad en la accesibilidad espacial, temporal (o de otro tipo) entre los usuarios. De hecho (como se puede apreciar en la siguiente sección) las funciones objetivo utilizadas en los modelos de equidad miden la *desigualdad* de la distribución relativa de las distancias de los usuarios frente al servicio. Por todo ello la mayoría de los autores usa los términos "equidad" e "igualdad" en localización de forma equivalente (ver Erkut [8]), y ello a pesar de que, como señala Mulligan [30], "equality is only one aspect of equity".

Una revisión de la literatura sobre modelos de localización con objetivos de equidad pone de manifiesto la existencia de dos lineas de investigación sobre el tema:

- La primera se orienta a cuestiones conceptuales relacionadas con: cómo medir la equidad, cómo definir medidas de equidad y qué propiedades deberían tener dichas medidas, qué ubicaciones relativas tienen las soluciones generadas por los correspondientes problemas de optimización y cómo seleccionar la medida más adecuada para cada problema. Estos aspectos han sido estudiados en [8, 9, 30, 33]. A nivel global destaca la revisión hecha por Marsh and Schilling [28], en la que se recoge un amplio abanico de medidas de equidad provenientes de otras disciplinas científicas, y se diseña una estructura y elementos comunes para su aplicación en Teoría de Localización. Asimismo el trabajo de Eiselt and Laporte [17] aporta una interesante discusión sobre cómo seleccionar apropiadamente una medida de igualdad.
- La segunda es una línea algorítmica, orientada tanto a diseñar algoritmos eficientes para resolver los distintos problemas de localización que resultan al considerar diferentes medidas de equidad, como a desarrollar experiencias computacionales que profundicen en el comportamiento de las distintas medidas (al objeto de detectar similitudes entre ellas), y que también analicen las relaciones existentes entre sus respectivas soluciones.

La investigación sobre equidad en Localización realizada en los últimos años se ha centrado fundamentalmente en el estudio de los aspectos algorítmicos y computacionales, situándose por tanto en la segunda de las anteriores líneas. La mayor parte de los trabajos tratan sobre problemas de localización puntual, no restringida, de un único servicio sobre una estructura de red, y los correspondientes procedimientos de resolución se basan en la posible discretización del problema mediante la identificación (cuando exista) de un Conjunto Dominante Finito (CDF, conjunto finito de puntos que contiene alguna solución óptima y que es válido para todos los ejemplares del problema de localización considerado [12]). A continuación haremos una breve exposición de algunos de los problemas más relevantes.

2 Medidas de desigualdad en redes

Consideremos una red $N = (G, W, l)$, donde $G = (V, E)$ es un grafo finito, conexo y no dirigido, $V = \{v_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de vértices, E es el conjunto de aristas ($|E| = m$), $W = \{w_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto de pesos no negativos asociados a los vértices (w_i es el peso del vértice v_i, $i = 1, \ldots, n$) que supondremos normalizados, esto es, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, y l es una función no negativa sobre el conjunto de aristas que asocia a cada arista $e \in E$ una longitud l_e. Supondremos que las aristas son rectificables, de forma que cada arista e se puede identificar con un intervalo de longitud l_e en el cual se sitúan sus puntos interiores. Denotaremos por N al *continuum* de puntos de la red (vértices y puntos sobre las aristas). Asimismo, la longitud sobre las aristas induce la distancia $d(x, y)$ entre dos puntos $x, y \in N$ como la longitud de algún camino más corto entre ambos.

Para cada localización $x \in N$, la función mediana es $M(x) = \sum_{i=1}^n w_i d(v_i, x)$. Las medidas que siguen son las más frecuentemente utilizadas en los modelos de equidad y cuantifican, mediante distintas funciones, la desigualdad de los usuarios relativa a la localización x:

Rango	$Z_r(x) = \max\limits_{i=1,\dots,n} w_i\, d(v_i,x) - \min\limits_{i=1,\dots,n} w_i\, d(v_i,x)$
Desviación Absoluta Media	$Z_d(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i\,\lvert d(v_i,x) - M(x)\rvert$
Máxima Desviación Absoluta	$Z_{max}(x) = \max\limits_{i=1,\dots,n} w_i\,\lvert d(v_i,x) - M(x)\rvert$
Suma de Diferencias Absolutas	$Z_{dif}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \lvert w_i\, d(v_i,x) - w_j\, d(v_j,x)\rvert$
Índice de Schutz	$Z_s(x) = \dfrac{Z_d(x)}{2\,M(x)}$

La siguiente medida, proveniente de un índice de equidad frecuentemente usado en Economía, presenta una formulación algo más compleja:

$$\text{Medida de Lorenz} \qquad Z_l(x) = \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n} w_{i_k}\Big(\sum\limits_{j=1}^{k-1} w_{i_j}\, d(v_{i_j},x) + w_{i_k}\dfrac{d(v_{i_k},x)}{2}\Big)}{M(x)},$$

donde, para cada $x \in N$, $\{i_1,\dots,i_n\}$ es la permutación de $\{1,,\dots,n\}$ tal que $d(v_{i_1},x) \leq \cdots \leq d(v_{i_n},x)$.

Los problemas de equidad resultantes de utilizar las anteriores medidas (con excepción de la de Lorenz) son del tipo $\min\limits_{x\in N} Z(x)$, y las localizaciones que resultan de resolverlos persiguen la "igualdad" del sistema, en el sentido de minimizar la variabilidad de la distribución de distancias (según la medida considerada). En todos los casos la existencia de un CDF permite obtener algoritmos directos mediante la evaluación de la función objetivo en los puntos del CDF. Sin embargo, la aplicación conjunta de los CDF y de otras técnicas tanto de geometría computacional como de programación lineal ha permitido la consecución de algoritmos más eficientes, cuyas complejidades se exponen en la siguiente sección.

Una caracterización de los CDF que intervienen en cada una de estas medidas, y sus correspondientes complejidades, puede encontrarse en [25]. Mención aparte merecen la Varianza: $Z_v(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i(d(v_i,x) - M(x))^2$, y el Coeficiente de Variación: $Z_{cv}(x) = \dfrac{\sqrt{Z_v(x)}}{M(x)}$, para las que (a diferencia de las anteriores) no se dispone de CDF conocido.

3 Análisis algorítmico

A continuación hacemos un breve recorrido sobre las complejidades computacionales de los procedimientos propuestos para resolver los problemas a que dan lugar las anteriores medidas.

Varianza. Uno de los primeros (y más amplamente estudiados) modelos de equidad es el que utiliza a la medida Varianza. El problema de localización de un servicio simple con el criterio Varianza (o problema 1-Varianza) fue resuelto en una red-árbol por Maimon [26] en tiempo lineal, y en una red general por Hansen y Zheng [10] en tiempo $O(mn\log n)$. En ambos casos se aplican técnicas recursivas para resolver un conjunto de subproblemas, siendo estos últimos restricciones del problema a cada una de las subaristas (aristas en el caso de árboles) sobre las que la función objetivo es convexa y diferenciable. Cada uno de los subproblemas se resuelve mediante técnicas de optimización diferenciable, y finalmente el óptimo global se selecciona como el mejor de los óptimos locales.

El mismo problema fue resuelto en tiempo lineal por Kincaid y Maimon [13, 14] sobre grafos 3-cactus y grafos triangulares.

Una interesante extensión del problema fue abordada por Berman [1], mediante la combinación de igualdad y eficiencia en tres modelos: en dos de ellos consideró una formulación restringida, minimizando la varianza (la mediana) sujeta a una cota superior sobre la mediana (la varianza), y en el tercero combinó ambas medidas en una función de utilidad lineal. El mismo autor propuso algoritmos de complejidad $O(n^3)$ para resolver los tres problemas en redes generales. Otras extensiones del modelo varianza abordan el problema con demanda aleatoria tanto en los vértices como en las aristas [20], y el problema de la localización múltiple de p servicios simultáneos [18, 19], problema este último NP-duro en redes generales y sin CDF conocido.

Medidas de Desviación Absoluta. La Desviación Absoluta Media y la Máxima Desviación Absoluta son criterios que trabajan sobre el *vector de las desviaciones absolutas* de las distancias de los usuarios con respecto a un valor medio, dado por:

$$(w_1|d(v_1,x) - M(x)|, \ldots, w_n|d(v_n,x) - M(x)|)$$

El problema de la 1-Desviación Absoluta Media fue inicialmente planteado y resuelto en redes generales por Berman y Kaplan [2] en tiempo $O(mn^2)$. Posteriormente Tamir [34] redujo esta complejidad a $O(mn \log n)$ mediante un algoritmo que trabajaba sobre los puntos del CDF del problema (formado por los vértices, puntos de cuello de botella arista y puntos intersección de funciones distancia con función mediana). En una red árbol, el problema fue resuelto en tiempo $O(n^2)$ por Mesa et al. [29] aplicando técnicas de programación lineal.

El problema 1-Máxima Desviación Absoluta se resuelve en [21] en tiempo $O(mn^2 \log n)$, mediante la construcción de la envoltura superior de las n funciones $\{w_i|d(v_i,x) - M(x)|\}$, $i = 1, \ldots n$ en cada uno de los intervalos donde todas ellas son lineales. Mesa et al. [29] reducen esta complejidad mediante sendos algoritmos que, usando técnicas de programación lineal, resuelven el problema en redes generales y en redes árbol en tiempos $O(mn^2)$ y $O(n^3)$, respectivamente. Finalmente, el caso no ponderado (donde $w_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$) en una red general es también resuelto en López de los Mozos et al. [21] mediante un procedimiento de complejidad $\max\{O(n^2 \log n), O(mn)\}$.

Suma de Diferencias Absolutas. Este es un criterio que considera el efecto (acumulado) de las comparaciones entre todos los pares de usuarios para evaluar la desigualdad del sistema. En redes generales el problema de localización de un servicio ha sido resuelto en tiempo $O(mn^2 \log n)$ en López de los Mozos et al. [22], mediante un algoritmo que recursivamente computa la función objetivo en los puntos del CDF. En redes árbol el problema es resuelto en tiempo $O(n^2 \log^2 n)$ en [29].

Índice de Schutz y Coeficiente de Variación. Estas dos medidas, junto con el coeficiente de Gini (este último descrito a partir de la curva de Lorenz [17]) son similares a las anteriores, pero se presentan normalizadas, esto es, divididas por una medida de tendencia central como es la Mediana. Consecuentemente, el Coeficiente de Variación (obtenido a partir de la Varianza) tampoco presenta CDF conocido, y el correspondiente problema de optimización se resuelve mediante un procedimiento similar al del problema 1-Varianza. En [4] se resuelven los problemas del Indice de Schutz y del Coeficiente de Variación en tiempo $O(mn \log n)$ en redes generales, y en tiempos respectivos de $O(n^2)$ y $O(n)$ en redes árbol.

Rango. Este es un objetivo que (al igual que sucede en la medida centro) sólo considera valores extremos. Por ello [17] objeta su utilización con propósitos de equidad a pesar de su tratabilidad analítica. El correspondiente problema de minimización en una red general y en una red árbol se puede resolver en tiempos de $O(mn \log n)$ y $O(nk \log^2 n)$, respectivamente, aplicando el algoritmo propuesto en [3] (k es un parámetro que depende del tipo de árbol).

Medida de Lorenz. En la relación de medidas de equidad descrita por Marsh y Schilling [28] no se incluye de forma expresa esta medida, sino el coeficiente de Gini, el cual se define en función de la curva de Lorenz. La curva de Lorenz (de amplio uso en campos económicos y de bienestar social), es esencialmente una gráfica de frecuencias relativas acumuladas, situada siempre bajo la bisectriz del primer cuadrante (bisectriz que representa la perfecta equidad). Por ello el correspondiente problema de localización es de maximización.

Fueron Halpern y Maimon [9] los primeros que formularon la medida de Lorenz en términos de un problema de localización, considerándola similar al coeficiente de Gini. Maimon [27] diseñó un algoritmo de complejidad $O(n^3 \log n)$ para encontrar la localización óptima con respecto a esta medida en una red árbol, y posteriormente, en un trabajo no publicado, Hansen y Zheng [11] redujeron dicha complejidad a $O(n^2 \log n)$, y Mesa et al. [29] obtienen un algoritmo de tiempo $O(n^2 \log^2 n)$ para un modelo ponderado más general en el que además se consideran tiempos de viaje. Estos mismos autores proporcionan un algoritmo de tiempo $O(mn^2 \log n)$ para resolver el problema en una red general.

4 Experiencia Computacional y Extensiones del Modelo

Como se ha podido constatar, existe un amplio abanico de medidas de equidad cuyo comportamiento funcional y algorítmico ha concentrado la mayor parte de la investigación existente. Sin embargo, no se dispone de un criterio que las agrupe o categorice en función de su grado de adecuación a algún tipo de problemas o escenarios. La experiencia computacional desarrollada en [9, 8, 30, 22] ha indagado esta cuestión, orientándose a detectar patrones o pautas de comportamiento similares tanto entre las distintas medidas de equidad como entre las localizaciones que producen. Por otra parte, la complejidad computacional de algunos problemas (como los de localización múltiple, NP-duros en redes generales) ha sido abordada mediante procedimientos heurísticos en [19].

Por último, hasta la fecha son escasas las extensiones del modelo que incorporen otros elementos en su formulación, como el considerar un espacio euclídeo, o la localización de una estructura dimensional. Respecto al primero citamos los trabajos de [7] y de [6], que abordan el estudio del rango en el plano y de la varianza en un espacio n-dimensional, respectivamente. En cuanto a la localización dimensional (no puntual) de servicios (como caminos, subárboles, árboles, y subredes) con algunos de los anteriores objetivos de equidad, se puede citar el estudio desarrollado en [5], que proponen un algoritmo de complejidad $O(n^2 \log n)$ para localizar un camino de mínima varianza en una red árbol.

Otras extensiones se sitúan en la primera de las líneas de investigación mencionadas anteriormente (orientada a cuestiones conceptuales), y apuntan tanto al desarrollo de modelos multicriterio como al diseño de formulaciones globalizadoras de varios criterios de equidad. A continuación comentamos brevemente ambos enfoques:

1. Para corregir las soluciones individualmente ineficientes que puede generar el uso aislado de una medida de equidad (al empeorar la situación relativa de todos los usuarios), el modelo multicriterio propuesto en [15, 16, 31] introduce el concepto de *eficiencia equitativa*, que persigue tanto la consideración igualitaria de todos los usuarios como la minimización de cada una de sus situaciones, entendiendo éstas como distancias (en su versión más simple), o más generalmente como los efectos, resultados, o ganancias (*outcomes*) que la localización del servicio produce en los usuarios. A tal fin, dichos autores plantean un problema multicriterio genérico: $\min\{\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{Q}\} = \min\{\mathbf{y} : \mathbf{y} \in A\}$ donde $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ es un vector de funciones objetivo aplicado sobre un conjunto $\mathcal{Q}$ de localizaciones factibles, e incorporan al concepto de Pareto-dominancia un conjunto complementario de axiomas de equidad para establecer una relación de *dominancia equitativa* sobre los vectores $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ del espacio de resultados A. Esta relación de dominancia equitativa puede ser también expresada mediante los vectores de desigualdades acumuladas

ordenadas $\bar{\Theta}(\mathbf{y}) = (\bar{\theta}_1(\mathbf{y}), \ldots, \bar{\theta}_m(\mathbf{y}))$, donde para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, $\bar{\theta}_k(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i(\mathbf{y})$ expresa el total de los k mayores efectos (o distancias) que se obtiene al sumar las k primeras componentes del vector decreciente $(\theta_1(\mathbf{y}), \ldots, \theta_m(\mathbf{y}))$, que ha sido obtenido mediante una permutación $(\theta_1, \ldots, \theta_m)$ que ordena de mayor a menor los componentes del vector $(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$. Las soluciones eficientemente equitativas corresponden a los vectores no dominados en dicha relación. El análisis conceptual y teórico de este modelo, asi como del tipo de soluciones que produce el uso de determinadas medidas de desigualdad en el vector de funciones objetivo $(f_1, \ldots, f_m)$ es el objetivo de los mencionados trabajos [15, 16, 31]. Sin embargo, en ellos no se abordan propuestas algorítmicas ni computacionales, ofreciéndose por tanto éste como un interesante campo de futuras investigaciones.

2. El segundo enfoque antes apuntado se orienta a cómo diseñar funciones objetivo que engloben y generalicen a varias de las aquí expuestas. En este sentido existen ya algunos trabajos que trasladan, al marco de la equidad, formulaciones generalizadoras provenientes del marco centro-mediana (y medidas relacionadas). Así podemos citar a los estudios realizados en [23, 24] que consideran sucesivamente una combinación convexa de las desviaciones absolutas Máxima y Media, una adaptación del modelo k-Centrum al vector de desviaciones absolutas, y un operador media ponderada sobre una permutación ordenada de dicho vector (función Desviación Absoluta Ordenada). En todos estos casos se discute la complejidad de los problemas resultantes y se presentan procedimientos algorítmicos de resolución.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la red temática Análisis y Aplicaciones de Decisiones sobre Localización de Servicios y Problemas Relacionados (MTM2004-22566-E). Los trabajos citados de los autores han sido parcialmente subvencionados por los proyectos: PB95-1237-C03, BFM2000-1052-C02-01 y BFM2003-04062/MATE.

Referencias

[1] O. Berman, *Mean-Variance location problems*
Transportation Science **24** (1990) 287-293.

[2] O. Berman, E.H. Kaplan, *Equity maximizing facility location schemes*
Transportation Science **24** (1990) 137-144.

[3] R.E. Burkard, H. Dollani, *Center problems with pos/neg weights on trees*
European Journal of Operational Research **145** (2003) 483-495.

[4] T. Cáceres, *Localización con criterios de igualdad*
Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2001.

[5] T. Caceres, M.C. Lopez-de-los-Mozos, J.A. Mesa, *The Path-Variance Problem on Tree Networks*
Discrete Applied Mathematics **145** (2004) 72-79.

[6] E. Carrizosa. *Minimizing the variance of Euclidean distances*,
Studies in Locational Analysis **12** (1999) 101-118.

[7] Z. Drezner, J.-F. Thisse, G.O. Wesolowsky, *The minimax-min location problem*
Journal of Regional Science **26** (1986) 87-101.

[8] E. Erkut, *Inequality measures for location problems*
Location Science **1** (1993) 199-217.

[9] J. Halpern, O. Maimon, *Accord and conflict among several objectives in locational decisions on tree networks*, in: Locational Analysis of Public Facilities, J.F. Thisse and H.G. Holler (Eds.), Series of Studies in Mathematical and Managerial Economics, North-Holland, Amsterdam (1983), 301-314.

[10] P. Hansen, M. Zheng, *An algorithm for the minimum variance point of a network*
RAIRO *Recherche opérationnelle/Operations Research* **25** (1991) 119-126.

[11] P. Hansen, M. Zheng, private communication, January 2002.

[12] J.N. Hooker, R.S. Garfinkel, C.K. Chen, *Finite dominating sets for network location problems*
Operations Research **39** (1991) 100-118.

[13] R.K. Kincaid, O. Maimon, *Locating a point of minimum variance on triangular graphs*
Transportation Science **23** (1989) 216-219.

[14] R.K. Kincaid, O. Maimon, *A note on locating a central vertex of a 3-cactus graph*
Computers & Operations Research **17** (1990) 315-320.

[15] M.M. Kostreva, W. Ogryczak, *Equitable approaches to location problems*, in: Spatial Multicriteria Decision making and Analysis: A Geographic Information Sciences Approach, J.-C. Thill (Ed.), Ashgate, Brookfield (1999), 103-126.

[16] M.M. Kostreva, W. Ogryczak, A. Wierzbicki, *Equitable aggregations and multiple criteria analysis*
European Journal of Operational Research **158** (2004) 362-377.

[17] H.A. Eiselt, G. Laporte, *Objectives in location problems*, in Facility Location: A Survey of Applications and Methods, (Zvi Drezner, ed.), Springer Series in Operations Research, New York (1995), 151-180.

[18] M.C. López-de-los-Mozos, J.A. Mesa, *The 2-Variance Problem in a Tree Network*
Studies in Locational Analysis **11** (1997) 73-87.

[19] M.C. López-de-los-Mozos, J.A. Mesa, *Heuristics for multiple facility location in a network using the variance criterion*
Journal of the Operational Research Society **51** (2000) 971-981.

[20] M.C. López-de-los-Mozos, J.A. Mesa, *The variance location problem on a network with continuously distributed demand*
RAIRO Operational Research **34** (2000) 155-181.

[21] M.C. López-de-los-Mozos, J.A. Mesa, *The maximum absolute deviation measure in location problems on networks*
European Journal of Operational Research **135** (2001) 184-194.

[22] M.C. López-de-los-Mozos, J.A. Mesa, *The sum of absolute differences on a network: algorithm and comparison with other equality measures*
INFOR **41** (2003) 195-210.

[23] M.C. López-de-los-Mozos, J.A. Mesa, *Certain (related) problems concerning two absolute deviation measures*
Working paper, presented at EWGLA14, Corfu (Greece), September 2003.

[24] M.C. López-de-los-Mozos, J.A. Mesa, J. Puerto, *A generalized model of equality measures in network location problems*
Submitted to Computers & Operations Research.

[25] M.C. López de los Mozos, J.A. Mesa, *Localización con criterios de equidad: una panorámica, últimos resultados y perspectivas futuras*, en: Avances en Localización de servicios y sus aplicaciones. B. Pelegrín (Ed.), pp. 331-348. Servicio de publicaciones de la Universidad de Murcia, 2004.

[26] O. Maimon, *The variance equity measure in locational decision theory*
Annals of Operations Research **6** (1986) 147-160.

[27] O. Maimon, *An algorithm for the Lorenz measure in locational decisions on trees*
Journal of Algorithms **9** (1988) 583-596.

[28] M.T. Marsh, D.A. Schilling, *Equity measurement in facility location analysis: A review and framework*
European Journal of Operational Research (1994) 1-17.

[29] J.A. Mesa, J. Puerto, A. Tamir, *Improved algorithms for several location problems with equality measures*
Discrete Applied Mathematics **130** (2003) 437-448.

[30] G.F. Mulligan, *Equality measures and facility location*
Papers in Regional Science: The Journal of the RSAI **70** (1991) 345-365.

[31] W. Ogryczak, *Inequality measures and equitable approaches to location problems*
European Journal of Operational Research **122** (2000) 374-391.

[32] S.J. Ratick, A.L. White, *A risk-sharing model for locating noxious facilities*
Environment and Planning **15** (1988) 165-179.

[33] E. Savas, *On equity in providing public services*
Management Science **24** (1978) 800-808.

[34] A. Tamir, *On the complexity of some class of location problems. (Technical Note)*
Transportation Science **26** (1992) 352-354.