Introducción a la Localización Condicionada.

Rodríguez-Chía, Antonio M.
Dpto. Estadística e I.O.
Universidad de Cádiz
antonio.rodriguezchia@uca.es

Puerto, Justo
Dpto. Estadística e I.O.
Universidad de Sevilla
puerto@us.es

Resumen

El objetivo de este trabajo es proporcionar al lector interesado una visión general del significado de localización condicionada, así como, de los diferentes modelos, caracterizaciones del conjunto solución y procedimientos de resolución estudiados en la literatura para este tipo de problemas. El problema de localización condicionada consiste en localizar uno o varios servicios que cubran la demanda de una serie de centros optimizando alguna medida de efectividad y teniendo en cuenta la existencia de otros servicios ubicados con anterioridad. Para su análisis, los modelos de localización condicionada se han agrupado en tres grandes bloques: el primero dedicado al problema del p-centro condicionado, en el segundo se analiza el problema de la p-mediana condicionada y en el tercero se estudian los problemas de localización condicionada de estructuras conexas sobre árboles.

1. Introducción

El problema clásico de localización consiste en ubicar uno o varios servicios para cubrir la demanda de una serie de puntos conocidos, usualmente denominados puntos de demanda, optimizando alguna medida de efectividad. En la literatura se puede encontrar un gran número de trabajos dedicados al estudio de este tipo de problemas. Dependiendo del espacio soporte donde se hayan planteado esos problemas, los procedimientos para estimarlos se clasifican en modelos de localización continua, discreta y sobre redes. Dentro de cada uno de estos tres grandes grupos de modelos, existe una amplia variedad de medidas de efectividad usadas para localizar los nuevos servicios. Sin duda alguna, dos de las más usadas son el criterio minisum, que busca la minimización de costes globales de transporte y el criterio minimax, basado en la equidad e igualdad de costes entre los puntos de demanda.

En el caso de localización sobre redes, una línea de investigación muy fructifera ha sido la de localizar servicios modelados por estructuras conexas (subárboles o caminos). Estos problemas se clasifican en discretos o continuos dependiendo de si los extremos de la estructura a localizar están restringidos a ser o no ser nodos del grafo. Para este tipo de modelos se han desarrollado algoritmos que encuentran soluciones óptimas de forma eficiente.

A principios de los años ochenta, Minieka acuñó con el nombre de problema de localización condicionada para referirse a aquellos problemas donde el objetivo era localizar uno o varios servicios teniendo en cuenta la existencia de otros cuya localización es conocida a priori, de forma que los puntos de demanda son cubiertos por el servicio más próximo, bien con uno de los servicios existentes o con uno de los nuevos.

Este tipo de modelos tiene cierta similitud con los modelos de localización competitiva puesto que se intentan localizar nuevos servicios teniendo en cuenta la existencia de otros. Ahora bien, en la localización competitiva se pretende maximizar el beneficio de los servicios a ubicar, para ello, se localizan de forma que atraigan el mayor número de puntos de demanda, es decir, maximicen su cuota de mercado. Sin embargo, en la localización condicionada los beneficiados son los puntos de demanda (usuarios) ya que los nuevos servicios se localizan con el objetivo de minimizar los costos globales de transporte. Por esta razón, estos modelos se utilizan cuando se plantea la expansión de una empresa, o en la localización de centros públicos o sociales, donde el objetivo principal es prestar un mejor servicio y no el obtener beneficios; un ejemplo concreto puede ser la localización de un nuevo hospital público teniendo en cuenta la existencia de otros, en este caso el objetivo es que todos los usuarios tengan un hospital lo más próximo posible.

A continuación se introduce la notación básica que se utilizará a lo largo de todo el capítulo. Sobre un espacio soporte X se considera un conjunto de puntos de demanda $A = \{a_1, \dots, a_M\}$, cada punto a_i lleva asociado un peso w_i que puede representar el grado de importancia de esa demanda dentro del conjunto A. También existe un conjunto de servicios cuyas localizaciones son conocidas $S = \{s_1, \dots, s_q\}$ y el conjunto de servicios a localizar $X_p = \{x_1, \dots, x_p\} \subseteq X$. Una formulación general del problema de localización condicionada viene dado por:

$$\min_{X_p \subseteq X} F\Big(w_1 \min\{d(a_1, X_p), d(a_1, S)\}, \dots, w_M \min\{d(a_M, X_p), d(a_M, S)\}\Big)$$

donde $F : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(a_i, X_p) = \min_{j=1,\dots,p} d(a_i, x_j)$ y $d(a_i, S) = \min_{k=1,\dots,q} d(a_i, s_k)$.

De entre los posibles modelos, los más estudiados son el del p-centro condicionado, cuya formulación viene dada por

$$\min_{X_p \subseteq X} F_C(X_p) := \max_{i=1,\dots,M} w_i \min\{d(a_i, X_p), d(a_i, S)\},$$

y el problema de la p-mediana condicionada, formulado como

$$\min_{X_p \subseteq X} F_M(X_p) := \sum_{i=1}^{M} w_i \min\{d(a_i, X_p), d(a_i, S)\}.$$

Los métodos de resolución para este tipo de problemas no pueden ser los procedimientos estándares de optimización convexa, puesto que el problema de la p-mediana condicionado no es convexo incluso para $p = 1$ y el problema del p-centro condicionado no es convexo para $p \geq 2$.

2. El problema del p-centro condicionado

En esta sección se analizan diversos procedimientos desarrollados para resolver el problema del p-centro condicionado. Dependiendo del espacio soporte, X, elegido para plantear el problema, se pueden desarrollar diferentes algoritmos para su resolución.

El primer procedimiento que se propone obtiene una solución aproximada para el problema del p-centro en el plano usando norma euclídea. Dicho procedimiento considera un problema aproximado, cuya formulación viene dada por

$$\min_{X_p \subseteq \mathbb{R}^2} \max_{i=1,\dots,M} w_i \left(\sum_{j=1}^{p} \|x_j - a_i\|_2^{-N} + \sum_{k=1}^{q} \|s_k - a_i\|_2^{-N} \right)^{-1},$$

donde N es un número suficientemente grande. Estos métodos permiten la resolución de problemas con gran número de puntos de demanda, para más detalle ver [2].

En [3] se presenta un algoritmo que conduce a una solución exacta del problema del p-centro condicionado en el plano usando norma euclídea. Dicho procedimiento se basa en la resolución de problemas de recubrimiento.

El método de resolución propuesto por [4]. presenta tal versatilidad que puede ser aplicado tanto para problemas planteados en el plano como sobre redes. La idea es obtener una solución del problema del p-centro condicionado a través de la resolución del orden de $O(\log M)$ problemas del p-centro no condicionado, independientemente del número de servicios existentes.

Finalmente, en [1] se propone un procedimiento para resolver el problema del p-centro condicionado sobre redes que además es válido para el caso de la p-mediana. Este método resuelve el problema del p-centro condicionado a través de la resolución de un problema del $(p+1)$-centro no condicionado.

3. El problema de la p-mediana condicionada

En esta sección se revisan varios procedimientos para resolver el problema de la p-mediana condicionada. Al igual que en la sección anterior, proponemos diferentes procedimientos desarrollados en la literatura para resolver este problema.

El primer método que se propone para resolver el problema de la p-mediana condicionado es similar al método propuesto anteriormente para resolver el problema del p-centro condicionado, en el sentido de que se obtiene una solución a través de la resolución de un problema aproximado. La complejidad para resolver el problema condicionado no es mucho mayor que la resultante de resolver el problema sin condicionar, para más detalle ver [2].

En [5] se proponen diferentes procedimientos para resolver el problema de la p-mediana condicionada en el plano dependiendo del número de servicios a localizar y el número de servicios existentes.

En el caso de problemas condicionados en grafos, en [7] se presentan adaptaciones al caso condicionado de procedimientos de resolución para diferentes versiones del modelo de la p-mediana, desarrollados originariamente en el caso no condicionado. En segundo lugar, se presenta un modelo que surgió ante la necesidad de localizar servicios adicionales para optimizar el tiempo de viaje de los pasajeros en una red de transportes. Para abordar este problema, se distinguen dos tipos de servicios a ubicar: servicios "soporte" que operan como servicio auxiliar de algún servicio existente y servicios "nuevos" que son autosuficientes y operan independientemente. Para este problema, se demuestra que cuando el objetivo es maximizar la utilidad del tiempo de viaje de todos los usuarios de la red de transporte y dicha la función de utilidad es convexa, al menos una solución óptima del problema se encuentra sobre los nodos del grafo, ver [8].

4. Localización condicionada de estructuras conexas sobre árboles

Sea $T = (V, E)$ un árbol no dirigido donde $V = \{v_1, ..., v_n\}$ es el conjunto de nodos y $E = \{e_2, ..., e_n\}$ el de aristas. $A(T)$ es el conjunto continuo de puntos de T, en realidad, $A(T)$ es un conjunto conexo y cerrado que resulta de la unión de $n-1$ intervalos. $P[v_i, v_j]$ es el único camino en $A(T)$ que conecta v_i y v_j. La longitudes de los ejes inducen una función distancia sobre $A(T)$. Para cualquier par de puntos $x, y \in A(T)$, se denota por $d(x, y)$ a la longitud de $P[x, y]$. Para cualquier subconjunto $Y \subseteq A(T)$ y x en $A(T)$ se define $d(x, Y) = d(Y, x) = \text{Inf}$ $\{d(x, y) | y \in Y\}$.

En nuestro modelo de localización, los nodos del árbol son considerados como puntos de demanda (clientes). El conjunto de servicios potenciales está formado por los subárboles Y del árbol original T y el conjunto de servicios existentes es el conjunto de nodos S.

En los modelos de localización de estructuras se distingue entre modelos discretos donde los puntos finales del servicio a ubicar están restringidos a ser nodos del grafo, y modelos continuos donde no existe tal restricción. Además, dependiendo de si la longitud de la estructura conexa a localizar es una nueva variable de decisión que forma parte de la función objetivo o es una restricción del problema, se habla de modelos estratégicos y modelos tácticos, respectivamente.

A continuación se presentan nuevos resultados sobre este problema que se encuentran recogidos en [9, 10, 12].

4.1. El modelo táctico condicionado con criterio minimax

En esta sección se considera el problema de localizar una estructura conexa (árbol o camino) cuya longitud está acotada por una cantidad prefijada L, usando el criterio minimax en el caso condicionado. Un estudio detallado de este tipo de problemas puede encontrarse en [12]. La formulación de dicho problema es:

$$\begin{aligned} \min_{Y \subseteq A(T)} \quad & F_C(Y) := \max_{i=1,\ldots,n} w_i \min\{d(v_i, Y), d(v_i, S)\} \\ s.a: \quad & L(Y) \leq L \end{aligned} \tag{1}$$

donde Y es un árbol (camino), $L(Y)$ su longitud y S es el conjunto de servicios existentes .

En primer lugar, puede probarse que tanto para el caso discreto como para el continuo existe una solución, y^*, del problema con $L = 0$ que está incluida en cualquier solución del problema con $L > 0$ (este tipo de propiedad se denominan, en general, "anidamiento"). En [12], se presenta un procedimiento que resuelve este problema en tiempo $O(n \log n)$.

4.2. El modelo táctico condicionado con criterio minisum

En esta sección se analiza la versión del problema estudiado en 4.1 pero cuando se utiliza el criterio minisum, en lugar del minimax. El problema es:

$$\begin{aligned} \min_{Y \subseteq A(T)} \quad & F_M(Y) := \sum_{i=1}^{M} w_i \min\{d(v_i, Y), d(v_i, S)\} \\ s.a: \quad & L(Y) \leq L \end{aligned} \tag{2}$$

donde Y es un árbol (camino), S es el conjunto de servicios existentes y $L(Y)$ su longitud.

En primer lugar, señalamos que el modelo condicionado discreto para localizar un camino es claramente polinomial porque el número de caminos es cuadrático, de ahí, que a través de un esquema de enumeración se puede desarrollar un algoritmo de complejidad $O(n^3)$. Esto establece una importante diferencia con el problema general del subárbol. Nótese que en este caso, el problema no condicionado es NP-duro en el caso discreto, ver [6] y resoluble en tiempo lineal en el caso continuo, ver [11]; además en este mismo trabajo se propone una aproximación completamente polinomial para resolver el caso discreto.

El modelo condicionado es NP-duro incluso para el caso continuo, en [12] se presenta una aproximación completamente polinomial. Desafortunadamente, la condición de conexión es necesaria para formular dichos modelos como problemas de programación matemática, por tanto, a diferencia del caso no condicionado no se pueden reducir a problemas de programación lineal. Además, en los modelos tácticos condicionados con criterio minisum no se tienen propiedades de anidamiento.

5. Conclusiones

Este capítulo revisa algunos resultados relacionados con los problemas de localización condicionada. Como se puede observar la gama de propiedades y procedimientos de resolución expuestos es bastante amplia, aunque aún existen numerosos temas de investigación que no han sidos tratados. Entre otros podemos citar los modelos de localización multiobjetivo condicionada, localización discreta condicionada, localización semirrepulsiva condicionada, etc.

Referencias

[1] Berman, O. and Simchi-Levi, D. Conditional location problems on networks. *Transportation Science*, 24(1):77–78, 1990.

[2] Chen, R. Conditional minisum and minimax location-allocation problems in Euclidean plane. *Transportation Science*, 23:157–160, 1988.

[3] Chen, R. and Handler, G. Y. The conditional p-center problem in the plane. *Naval Research Logistics*, 40:117–127, 1993.

[4] Drezner, Z. Conditional p-center problems. *Transportation Science*, 23:51–53, 1989.

[5] Drezner, Z. On the conditional p-median problem. *Computers and Operations Research*, 22:525–530, 1995.

[6] Hakimi, S.L., Schmeichel, E.F., and Labbé, M. On locating path- or tree-shaped facilities on networks. *Networks*, 23(6):543–555, 1993.

[7] Minieka, E. Conditional centers and medians of a graph. *Networks*, 10(3):265–272, 1980.

[8] Mirchandani, P.B. and Odoni, A.R. Locating new passenger facilities on a transportation network. *Transportation Research. Part B*, 13(2):113–122, 1979.

[9] Puerto, J. and Rodríguez-Chía, A.M. New results on the conditional location of structures on tree networks. *Actas del XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Ediciones de la Universidad de Lérida*, 2003.

[10] Puerto, J. and Tamir, A. Locating tree-shaped facilities using ordered median objective. *Mathematical Programmig*, to appear.

[11] Tamir, A. Fully polynomial approximation schemes for locating a tree-shaped facility: a generalization of the knapsack problem. *Discrete Applied Mathematics*, 87(1-3):229–243, 1998.

[12] Tamir, A., Puerto, J., Mesa, J.A., and Rodríguez-Chía, A.M. Conditional location of path and tree shaped facilities on trees. *Technical Report Tel-Aviv University*, 2001.