MODELOS LINEALES DE FIABILIDAD PARA PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN SIN CAPACIDADES TIPO MEDIANA

Centro de Investigación Operativa

UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ

Javier Alcaraz[a], Mercedes Landete[a], Alfredo Marín[b], Juan Francisco Monge[a]

[a] Universidad Miguel Hernández de Elche

[b] Universidad de Murcia

Introducción

El problema de localización de plantas sin capacidades es un clásico en la literatura de los problemas de localización. El objetivo es dar servicio a todos los clientes minimizando el coste total que resulta de sumar el coste de transporte desde las plantas hasta los clientes y el coste de apertura de las plantas. Cuando existe la posibilidad de que las plantas que sirven a los clientes fallen, hay que considerar soluciones que indiquen cómo actuar cuando esto ocurre.

La siguiente bibliografía recoge las distintas formulaciones lineales sin capacidades.

- Snyder, Daskin, Reliability Models for facility location: The expected failure cost case. *Trans. Science* 39(3) 440-416, 2005.
- Zhan, Models and algorithms for reliable facility location problems and system reliability optimization. Tesis Doctoral (Universidad de FLorida), 2007.
- Lee, Chang, On solving the discrete location problem when the facilities are prone to failure. *Applied Mathematica Modelling* 31, 817-831, 2007.

Formulación en L. V. Snyder, M. S. Daskin(2005) I

- NF subconjunto de J que no falla
- F subconjunto de J que puede fallar con probabilidad q
- θ_i coste de no servicio a i, o penalización asociado a una variable ficticia.
- $w_1 = \sum_{j\in J} f_jY_j + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} h_i d_{ij} X_{ij0}$
- $w_2 = \sum_{i\in I} h_i(\sum_{j\in NF}\sum_{r\in R} d_{ij}q^r X_{ijr} + \sum_{j\in F}\sum_{r\in R} d_{ij}q^r(1-q)X_{ijr})$.

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \alpha w_1 + (1-\alpha)w_2\\
s.a \quad & \sum_{j\in J} X_{ijr} + \sum_{j\in NF}\sum_{s=0}^{r-1} X_{ijs} = 1 && \forall i\in I, r\in R\\
& X_{ijr} \le Y_j && \forall i\in I, j\in J, r\in R\\
& \sum_{r\in R} X_{ijr} \le 1 && \forall i\in I, j\in J\\
& Y_u = 1 &&\\
& Y_j \in \{0,1\} && \forall j\in J\\
& X_{ijr} \in \{0,1\} && \forall i\in I, j\in J, r\in R
\end{aligned}
$$

Formulación en R. L. Zhan (2007)

- Z_{ir} vale 1 si el cliente i tiene $r-1$ niveles de fallo con plantas alternativas y, por lo tanto, en el nivel r incurre en un coste de penalización.
- Todas las plantas son candidatas a fallar, $NF = \emptyset$.
- No se definen variables ficticias de penalización.

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{j\in J} f_jY_j + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{r=1}^{|J|} h_i d_{ij} X_{ijr}(1-q)q^{r-1} + \\
\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{|F|+1} h_i q^{r-1} Z_{ir}\theta_i\\
s.a \quad \sum_{j\in F} X_{ijr} + \sum_{t=1}^{r} Z_{ir} = 1 \quad \forall i,r\\
\sum_{r=1}^{|F|} X_{ijr} \le Y_j \qquad \forall i,j\\
Y_j, X_{ijr}, Z_{ir} \in \{0,1\} \quad \forall i,j,r
\end{aligned}
$$

Formulación en S. D. Lee, W. T. Chang(2007)

- Se considera un único nivel de fiabilidad.
- X^1_{ij} y X^2_{ij} son variables ≥ 0 e indican la proporción de la demanda de i que se sirve desde j, si j es la asignación primaria o secundaria respectivamnete.
- Las probabilidades de fallo son potencialemnete distintas para cada planta, q_j. F y NF dependen de estos valores.

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{j\in J} f_jY_j + \sum_{i\in I, j,k\in J, k\ne j} d_{ij}(1-q_j)X^1_{ij} + d_{ik}q_jX^2_{ik}\\
s.a \quad \sum_{j\in J}\sum_{k\in J, k\ne j} (1-q_j)X^1_{ij} + q_jX^2_{ik} = 1 \quad \forall i\\
X^1_{ij} \le Y_j \ \forall i,j\\
X^2_{ij} \le Y_j \ \forall i,j\\
X^1_{ij}, X^2_{ij} \ge 0 \ \forall i,j\\
Y_j \quad \in \{0,1\} \ \forall i,j
\end{aligned}
$$

Avances en la formulación de L. V. Snyder, M. S. Daskin(2005)

Incorporamos cliques

$$
Y_j + \sum_{r\in R} X_{ijr} \le 1; \qquad \sum_{w\in R: w\ge r} X_{ijw} + \sum_{t\in NF}\sum_{w=0}^{r} X_{itw} \le 1,
$$

"otros cortes" y hacemos ceros

$$
Y^*_{ijr} = 0 \text{ for all } i\in I, j\in J, r\in R : d_{ij} < D^i_r
$$
$$
Y^*_{ijr} = 0 \text{ for all } i\in I, j\in J, r\in R : d_{ij} > \theta_i.
$$

CPLEX				+Cliques		+Cliques+Ceros					+todo	
	alpha	t	gap	t	gap	t	gap	ceros $d_{ij} < D^i_r$	ceros $d_{ij} > \theta_i$	no ceros	t	gap
3	0,2	960	42	888	18	324	18	48686	54468	19397	190	16
3	0,5	778	30	728	22	384	22	48686	54468	19397	91	21
3	0,8	229	22	203	20	206	20	48686	54468	19397	91	19
4	0,2	1426	43	1606	18	679	18	49066	53244	20241	232	16
4	0,5	556	31	434	23	349	23	49066	53244	20241	96	22
4	0,8	332	24	324	22	285	22	49066	53244	20241	91	22
5	0,2	988	43	839	17	565	17	48838	54162	19551	262	16
5	0,5	241	30	188	22	149	22	48838	54162	19551	83	21
5	0,8	259	23	246	21	207	21	48838	54162	19551	89	21
6	0,2	1725	43	1672	17	823	17	48948	54060	19543	312	16
6	0,5	317	30	323	22	269	22	48948	54060	19543	140	21
6	0,8	347	23	353	21	298	21	48948	54060	19543	70	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
32	0,2	1076	43	900	17	355	17	49154	52938	20459	252	16
32	0,5	186	26	191	17	174	17	49154	52938	20459	77	17
32	0,8	337	20	306	18	256	18	49154	52938	20459	77	17
		789,73	32	756	20	417	20	48696	54304	19549	147	20

Nuevo modelo con las hipótesis de S. D. Lee, W. T. Chang(2007)

Suponemos la probabilidad uniforme en F y consideramos que la asignación secundaria ha de ser a una planta que no falle.

- $X^1_{ij} = 1$ si el cliente i se sirve primero desde j,
- $X^2_{ij} = 1$ si el cliente i se sirve en segundo lugar desde j,
- $Y_j = 1$ si una planta no fiable se instala en j,
- $W_j = 1$ si una planta fiable se instala en j,

$$
\begin{aligned}
\min\ & \textstyle\sum_{j\in F} f_jY_j + \sum_{j\in N} g_jW_j + \sum_i\sum_{j\in N} d_{ij}X^1_{ij} + \\
& \textstyle\sum_i\sum_{j\in F}(1-q)d_{ij}X^1_{ij} + \sum_i\sum_{j\in N} qd_{ij}X^2_{ij}\\
\text{s.a}\quad & \textstyle\sum_{j\in F\cup N} X^1_{ij} = 1, && \forall i\\
& \textstyle\sum_{j\in N} X^1_{ij} + \sum_{j\in N} X^2_{ij} = 1, && \forall i\\
& X^1_{ij} \le Y_j && \forall i,j,\\
& X^1_{ij} + X^2_{ij} \le W_j && \forall i,j,\\
& Y_j \in \{0,1\} && \forall j\in F\\
& W_j \in \{0,1\} && \forall j\in N\\
& X^1_{ij} \in \{0,1\} && \forall i,j\\
& X^2_{ij} \in \{0,1\} && \forall i,j\in N.
\end{aligned}
$$

Descomposición de Benders para el nuevo modelo

No es difícil probar que la integridad de X^1_{ij} y X^2_{ij} se puede relajar. Por lo tanto, la descomposición de Benders es un método candidato de resolución.
En concreto, el dual es

$$
\begin{aligned}
\max\ & \textstyle\sum_i(u_i+v_i) - \sum_i\sum_{j\in F} y^*_j s_{ij} - \sum_i\sum_{j\in N} w^*_j t_{ij}\\
\text{s.a}\quad & u_i - s_{ij} \le (1-p)c_{ij} && \forall i, j\in F,\\
& u_i + v_i - t_{ij} \le c_{ij} && \forall i, j\in N,\\
& v_i - t_{ij} \le pc_{ij} && \forall i, j\in N,\\
& s_{ij} \ge 0 && \forall i, j\in F,\\
& t_{ij} \ge 0 && \forall i, j\in N.
\end{aligned}
$$

Este problema es separable y se puede resolver por inspección en cada i.

$$
\begin{aligned}
\max\ & \textstyle u_i + v_i - \sum_{j\in F_1} y^*_j s_{ij} - \sum_{j\in N_1} w^*_j t_{ij}\\
\text{s.a}\quad & u_i - s_{ij} \le (1-p)c_{ij} && \forall j\in F,\\
& u_i + v_i - t_{ij} \le c_{ij} && \forall j\in N,\\
& v_i - t_{ij} \le pc_{ij} && \forall j\in N,\\
& s_{ij}, t_{ij} \ge 0 && \forall j
\end{aligned}
$$

Resultados computacionales para el nuevo modelo

En el estudio computacional hemos probado:

$$
F| = |NF| = 100,
$$

$$
d_{ij} \sim \mathcal{U}[0,100] \quad \forall i\in I, j\in J
$$

$$
f_j = 500 \quad \forall j\in F, \qquad g_j = 500\alpha \quad \forall j\in NF
$$

Problema		CPLEX		Benders(30it.)		Tipo	
α	q	t(seg)	gap	t(seg)	gap	$\|F\|^*$	$\|NF\|^*$
2	0.1	3334	9.31	4	0	0	11
2	0.3	5973	9.31	52	0	0	11
2	0.5	19912	9.80	130	8	1	10
2	0.7	76843	10.67	127	15.76	4	9
5	0.1	13479	12.26	10	0	0	7
5	0.3	58364	12.75	114	7	3	6
5	0.5	69148	12.59	114	12.82	5	6
5	0.7	85527	12.75	91	11.96	9	4

Incluyen distintas soluciones iniciales, actualizaciones de la cota superior, distintas soluciones por inspección, relajación del gap en CPLEX.

Conclusiones y trabajo futuro

Hemos revisado las formulaciones lineales que en la literatura aparecen para problemas de localización sin capacidades tipo mediana y hemos observado que estos pueden presentar:

- probabilidades distintas de fallo para las plantas o probabilidades uniformes,
- penalizaciones por no dar servicio u obligación de darlo,
- distintos niveles de fiabilidad.

Las líneas de trabajo futuro inmediatas son:

- análisis poliédrico de la formulación con dos índices,
- análisis poliédrico de modelos con probabilidad no uniforme,
- búsqueda de buenos modelos lineales para probabilidades no uniformes multi-nivel.